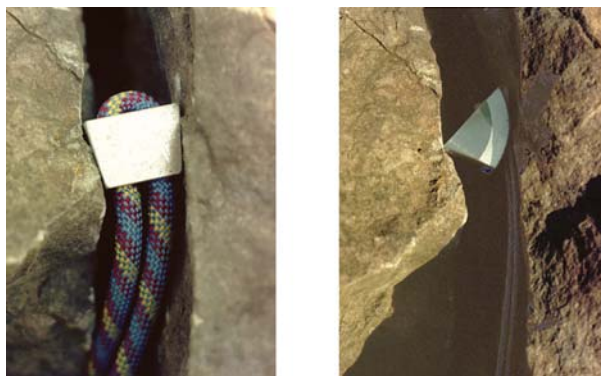


### 3.8 Výstředníkové vklíněnce

Výstředníkové vklíněnce jsou názorným příkladem toho, jak se dá fyzika ve spojení s matematikou použít k prozkoumání předmětů kolem nás. Student si při hledání vhodného tvaru daného předmětu (podrobněji viz níže) musí propojit matematické a fyzikální znalosti, popř. si některé informace doplnit samostatným studiem nebo je vyhledat např. na Internetu.

Při zdolávání strmých stěn používají horolezci nejrůznější vybavení. Když se totiž chtějí jistit, potřebují k tomu něco pevného, do čeho se dá zapnout karabina s probíhajícím lanem. To „něco pevného“ může být skoba zatlučená do spáry, smyčka s uzlem vklíněným ve spáře nebo kruh upevněný do vyvrtané díry v pískovci. Posledních asi třicet let se používají vklíněnce - kousky kovu nebo plastu se smyčkou, které se, jak název napovídá, vklíní do spár a dírek ve skále. Vynalézavost lidu lezoucího po skalách a výrobců horolezeckého materiálu se soustředila na vymýšlení tvarů vklíněnců tak, aby byly co nejuniverzálnější a dobře držely v různých situacích.

Vklíněnce tvaru komolého jehlanu (zvané stopery, obr. 1 vlevo) jsou jen zřídka použitelné ve spárách s prakticky rovnoběžnými stěnami. Na takové spáry byly ale vymyšleny speciálně křivé vklíněnce, jako ten, který je na obrázku 1 vpravo. Říká se jim výstředníkové a my se budeme v tomto článku podrobně zabývat diskusí jeho tvaru.



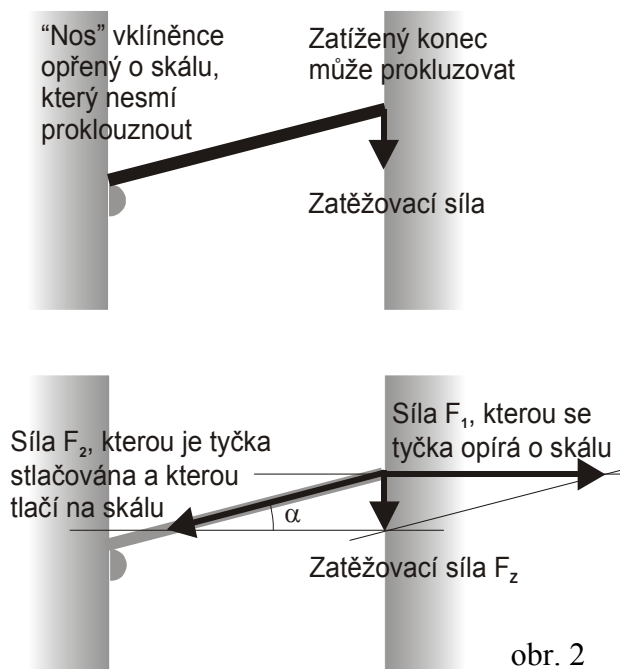
obr. 1

Všimněte si opřené „nosu“ druhého vklíněnce na levé straně spáry a lanka od vklíněnce na pravé straně temné spáry. Tyto dva postřehy naznačují princip funkce vklíněnce – pracuje jako tyčka jedním koncem opřená o nerovnost skály a opírající se druhým zatíženým koncem o protější stěnu spáry, viz obr. 2

Taková tyčka by mohla fungovat docela dobře, ale bylo by potřeba najít prakticky vhodný úhel  $\alpha$  jejího sklonu. Pro síly totiž platí jednoduché vztahy

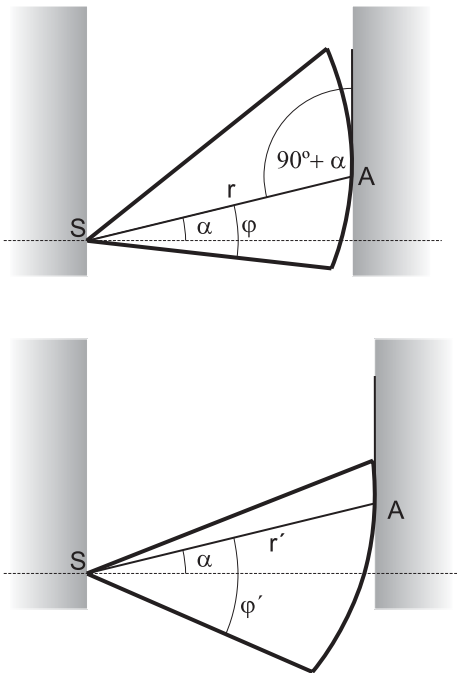
$$\frac{F_z}{F_1} = \operatorname{tg} a, \quad \frac{F_z}{F_2} = \sin a$$

Pro velký úhel  $\alpha$  by byly síly srovnatelné se zatěžovací silou  $F_z$ , ale hrozilo by sklouznutí tyčky z opěry nalevo. Při malém úhlu  $\alpha$  se tyčka lépe zapře, ale síly, kterými je namáhána a kterými působí na stěny spáry, mohou být velmi velké. Chceme-li zachovávat nějaký optimální úhel  $\alpha$ , pak narazíme na nutnost mít pro každou šířku spáry speciální tyčku.



obr. 2

Zobrazený vklíněnc funguje sice jako zmíněná tyčka (spojnice mezi „nosem“ a bodem dotyku na druhé straně), ale PŘIZPŮSOBUJE SE ŠÍŘCE SPÁRY! Pojdme prostudovat, jak.



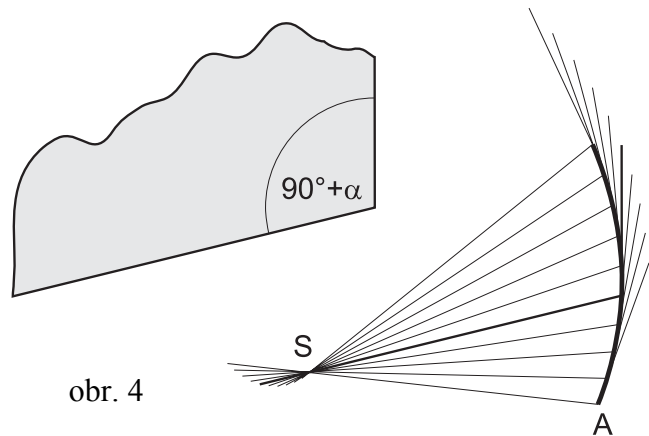
obr. 3

Zvolme počáteční polohu rotačního vklíněnce s body dotyku  $S$ ,  $A$ . Pak vzdálenost bodů dotyku vklíněnce a skály je  $r = SA$ . Širší štěrbině se vklíněnc přizpůsobí tak, že se pootočí, takže nové body dotyku jsou nyní vzdáleny  $r'$ . Přitom se však úhel  $\alpha$  mezi spojnici dotkových bodů a kolmicí na stěny štěrbině nemění a vklíněnc drží stejně dobře jako dřív.

Užívaná hodnota  $\alpha$ , která je dána zkušeností horelezců, je  $13,75^\circ$ . Při pootočení vklíněnce kolem bodu  $S$  se ale mění úhel  $\varphi$ , který svírá spojnice bodů dotyku a hrana vklíněnce. Tvar vklíněnce je charakterizován závislostí  $r$  na úhlu  $\varphi$ . To se často popisuje slovy, že máme tvar zadaný křivkou v polárních souřadnicích  $r$ ,  $\varphi$  s počátkem v bodě otáčení  $S$  (obr. 3).

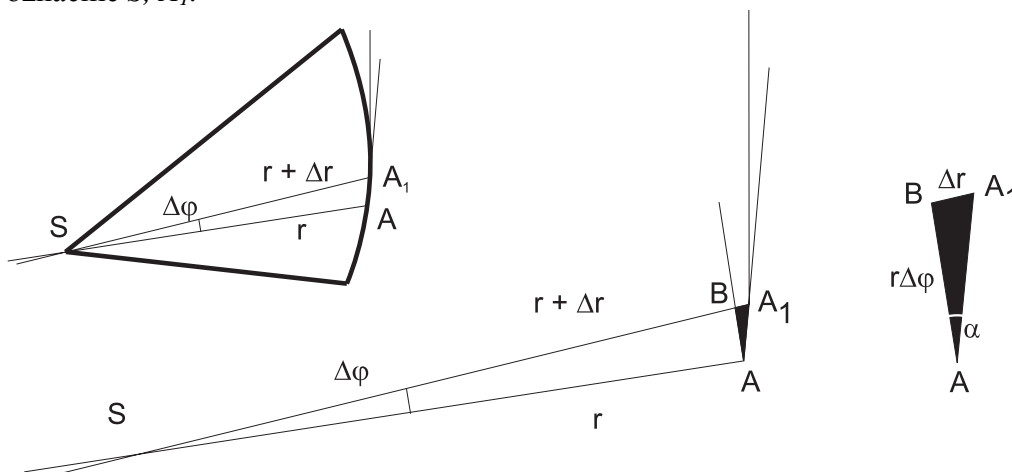
Pro lepší představu hledaného tvaru se nebojte vzít do ruky dvě čtvrtky, nůžky, pravítko a úhloměr a vytvořit si papírový model funkčního výstředníkového vklíněnce.

Z jedné čtvrtky vyrobte tupý úhel úhel  $90^\circ + \alpha$  (viz obr. 4). Na druhé čtvrtce zvolme bod otáčení  $S$  a počáteční dotkový bod  $A$ . Postupně přikládáme přes čtvrtku tupý úhel tak, aby jedna jeho hrana stále procházela bodem  $S$  a přitom podél druhé hrany úhlu budeme dokreslovat na čtvrtku krátké úsečky. Měníme tak délku  $r$  a vytvořená lomená čára nahrazuje plynulou křivku okraje vklíněnce.



obr. 4

Jsou-li body dotyku rotačního vklíněnce pro určitou šířku štěrbině označeny  $S$ ,  $A$ , pak při malém zvětšení štěrbině se vklíněnc pootočí o úhel  $\Delta\varphi$  (viz obr.4). Nové body dotyku označme  $S$ ,  $A_1$ .



obr. 5

Při malém pootočení  $\Delta\varphi$  je  $\triangle ABA_1$  téměř pravoúhlý s přeponou  $AA_1$ , úhlem  $\alpha$  u vrcholu  $A$  platí

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta r}{r \cdot \Delta \varphi}.$$

K určení tvaru vklíněnce hledáme závislost  $r$  na  $\varphi$  vyhovující této rovnici. Tuto rovnici lze řešit například numericky (např. pomocí programu Famulus nebo vámi sestaveného vlastního programu v libovolném programovacím jazyce), jak je naznačeno v následujících řádcích.

```
pocatecni hodnoty: delka0=3;delta_fi=3.1;tangens_alfa=0.25
krok cyklu: nova_delka=stara_delka + delka*delta_fi*tangens_alfa
```

$$\Delta r = \operatorname{tg} \alpha \cdot r \cdot \Delta \varphi = K \cdot r$$

Tak jsme naprogramovali zvětšení délky  $r$  v jednom kroku cyklu vypočtené z předcházející rovnice, kde  $K$  je konstanta.

Označme  $r_0$  počáteční hodnotu vzdálenosti dotkových bodů a  $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$  vzdálenosti po 1,2,3... $n$  krocích. Je-li  $\Delta r = r_n - r_{n-1}$ , pak platí  $r_n = r_{n-1} + r_{n-1} \cdot K = r_{n-1} \cdot (1 + K)$  a tedy

$$(2) \quad r_n = r_0 \cdot (1 + K)^n = r_0 \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi)^n,$$

kde  $n$  je dáno zvolenou délkou kroku  $\Delta\varphi$  a úhlem  $\varphi$ , který nás zajímá. Platí tedy

$$n = \frac{\varphi}{\Delta \varphi}.$$

Vztah (2) vám jistě připomene známé úlohy z finanční matematiky o úročení vkladů (snadno zjistíte, že námi zvolené hodnoty odpovídají zúročení 2,5%).

S pomocí numerických výpočtů nebo příslušných tabulek můžete vypočítat tvar vklíněnce, který jste sestrojili graficky. Ale pokračujme v matematických úpravách dále. Jednoduché problémy musí mít elegantní řešení!

S využitím definice logaritmické a exponenciální funkce můžeme vztah (2) dále upravit

$$r_n = r_0 \cdot e^{\ln(1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi)^n} = r_0 \cdot e^{n \cdot \ln(1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi)}$$

Protože však hodnota  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi$  je při našich úvahách velmi malá, můžeme použít přibližný vztah  $\ln(1 + x) \approx x$ , tedy  $\ln(1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi) \approx \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi$ . Pak

$$r(\varphi) = r_n \approx r_0 \cdot e^{n \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta \varphi} = r_0 \cdot e^{\varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Tento vztah již sice neobsahuje  $\Delta\varphi$ , ale při jeho odvození jsme museli uvažovat dostatečně malé kroky  $\Delta\varphi$ .

Matematicky zručný čtenář již v rovnici (1) poznal diferenciální rovnici

$$r \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{dr}{d\varphi}$$

a umí najít její řešení ve tvaru

$$r = r_0 \cdot e^{\varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha}.$$

Všechny metody vedou ke stejnému řešení úlohy. Všechny nám dovolují pochopit, jak původně tajemně zakřivený vklínělec funguje, a také umožňují ho vyrobit. Stejný princip funkce mají i složitější "zařízení" jako na následujícím obrázku 6.

Výše zmíněná hodnota úhlu  $\alpha = 13,75^\circ$  – je výsledkem praktické optimalizace. Jde totiž o to, aby se vklíněnce při použití standardních lehkých materiálů (duralu) příliš nezdeformovaly a neproklouzly spárou (to hrozí při malém  $\alpha$ ), ale aby se správně zakously. Jde tu o velké síly – karabiny a smyčky jsou dimenzovány typicky na 22 kN. Zatížíte-li vklínělec s úhlem  $13,75^\circ$  takovou silou, pak tlačí do stěn spáry silami zhruba 90 kN. I když to vydrží vklínělec, nemusí to vydržet skála. Proto je lezení stále nebezpečnou činností, kdy jištění může mít stěží stoprocentní účinnost. Ale ani sezení u stolu není bez rizika ...



obr. 6

Další zajímavé informace najdete například na webové stránce jednoho z výrobců: [www.wildcountry.co.uk](http://www.wildcountry.co.uk), najdete je také v horolezecké literatuře a časopisech a konečně v obchodech s horolezeckým vybavením a na skalách.