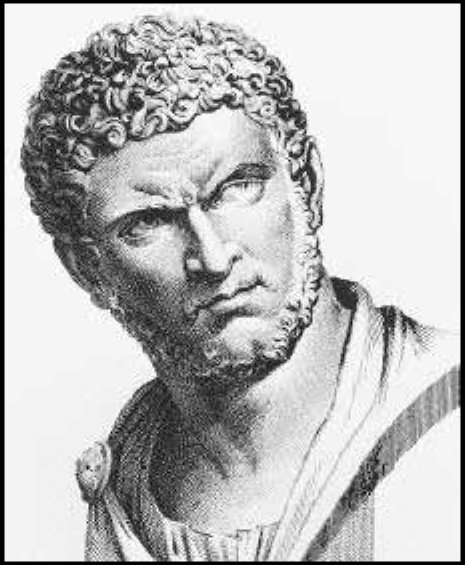
Symetrie, dynamické symetrie, supersymetrie...

v mikrosvětě

Pavel Cejnar cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz
Ústav částicové a jaderné fyziky MFF UK, Praha



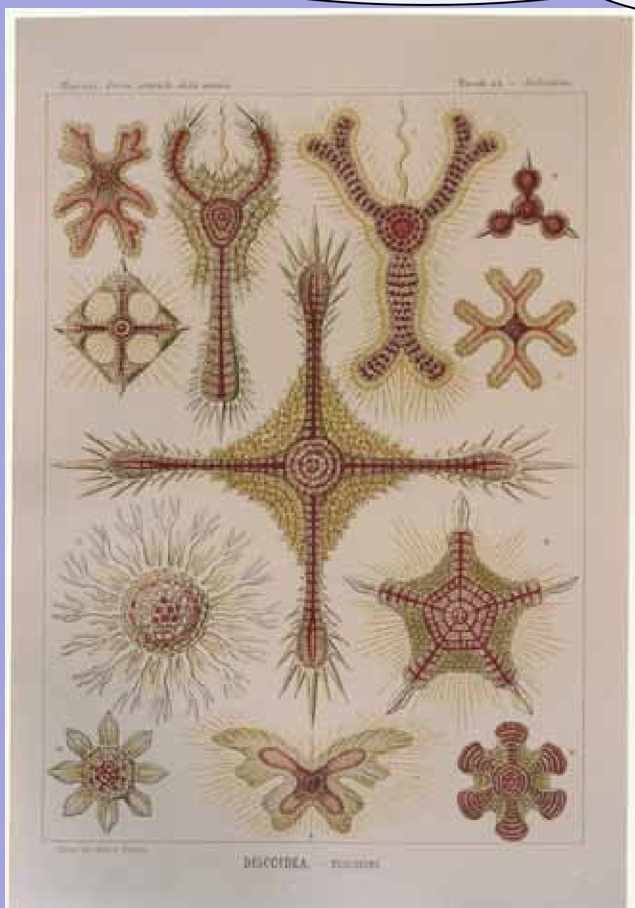
Nahoru, dolů, dokola – toť dráhy prvků.

Marcus Aurelius, 121-180 A.D.

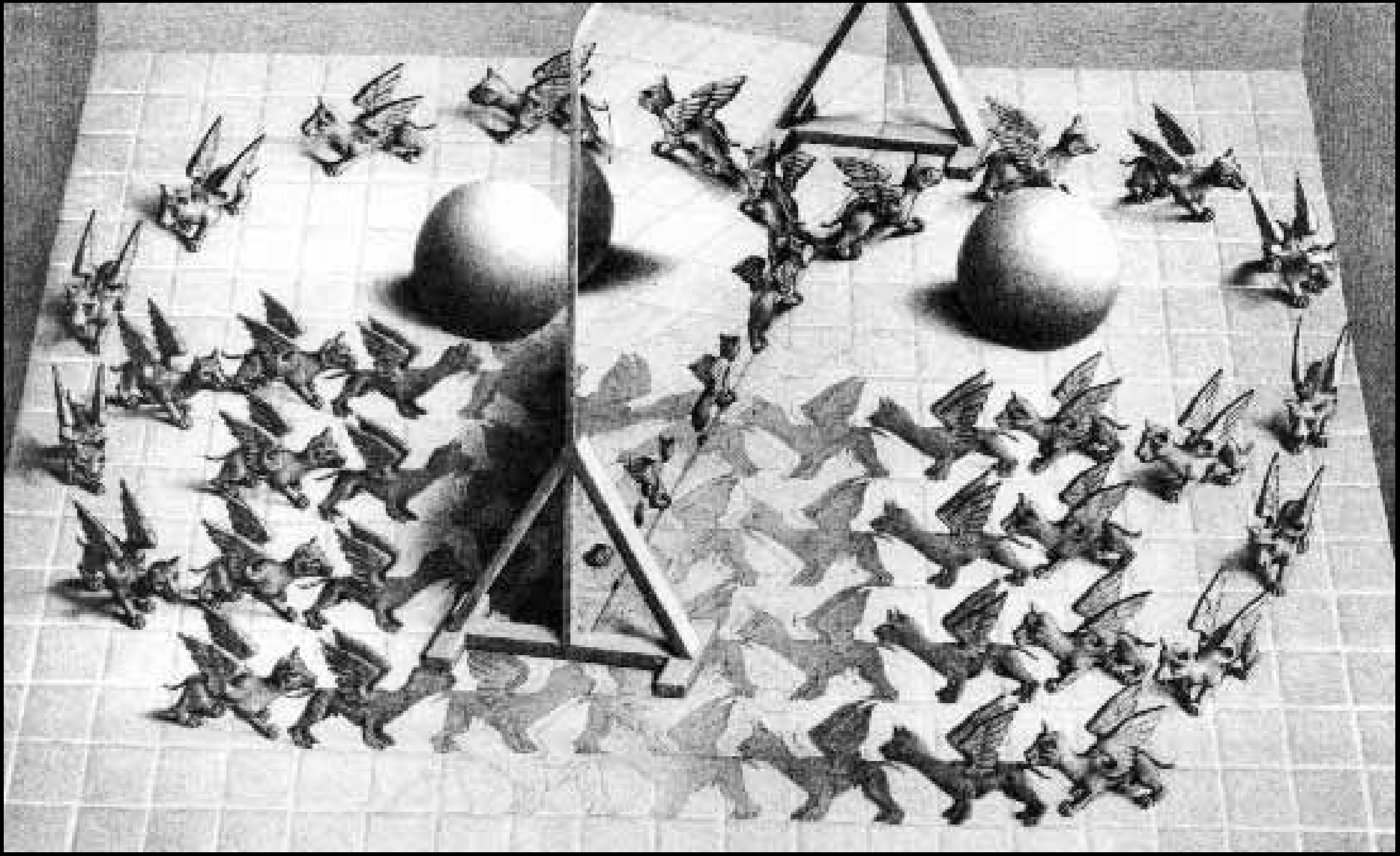
Příroda vytváří symetrie ⟶ Symetrie tvoří přírodu

1) Nejdůležitější fyzikální veličiny vyplývají ze symetrií
Teorém Noetherové: vztah mezi symetriemi a zákony zachování

2) Tvar fyzikálních zákonů je určen symetriemi
Typy částic v přírodě a způsob jejich interakce vyplývají ze symetrie



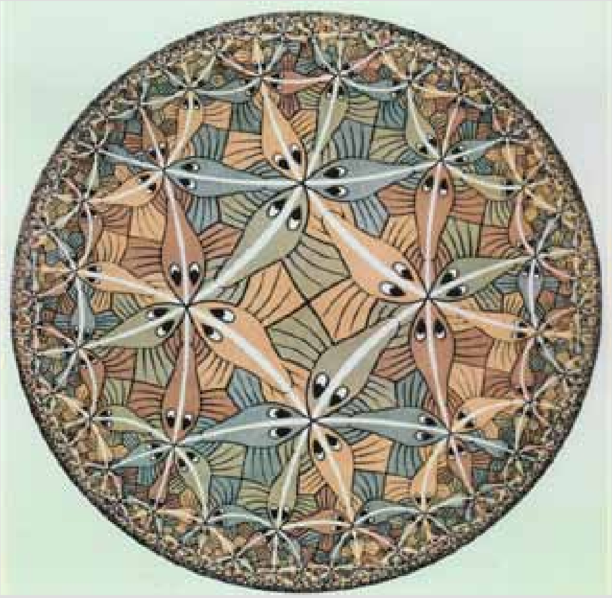
Symetrie v matematice a fyzice



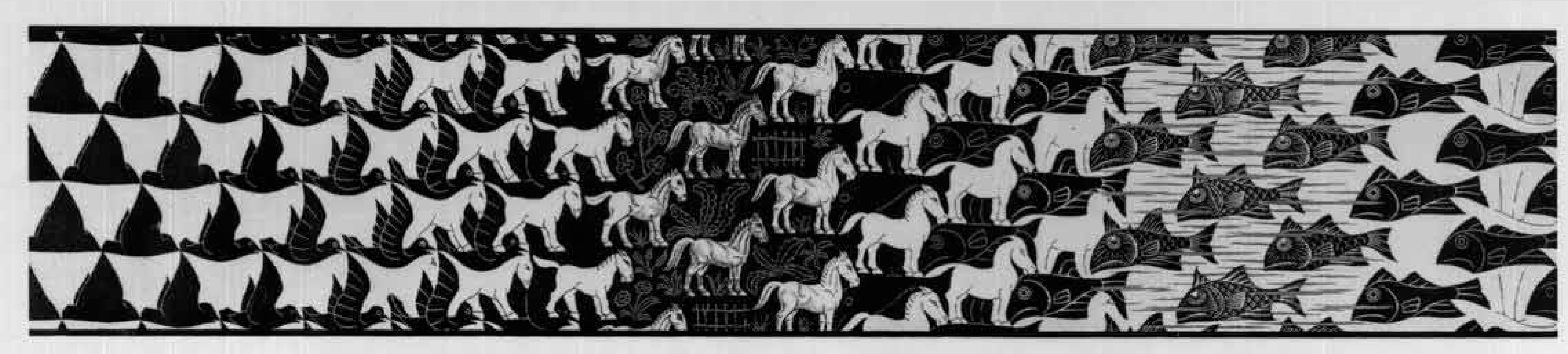
M.C.Escher (1898-1972)

Co je symetrie?

"A thing is symmetrical, if there is something that you can do to it, so that after you have finished doing it, it still looks the same as it did before you did it."



H. Weyl (1885-1955)



Matematika symetrií: **teorie grup**

Leonhard **Euler** (1707-1783), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Niels Henrik **Abel** (1802-1829), Évariste **Galois** (1811-1832), Walther von **Dyck** (1856-1934), Marius Sophus **Lie** (1842-1899), Élie Joseph **Cartan** (1869-1951), …………

Definice grupy:

Grupou nazýváme množinu

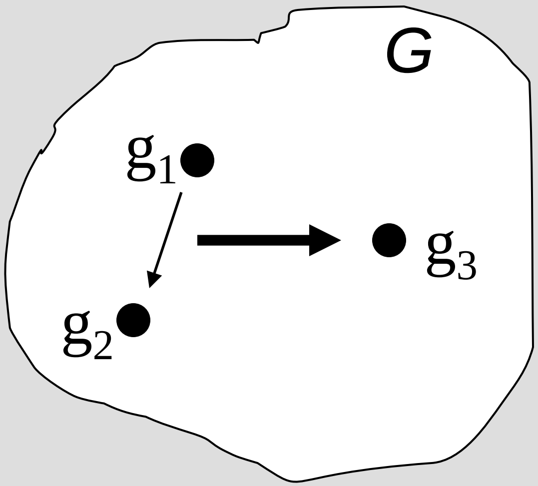
$$G \equiv \{g_1, g_2, \ldots\ldots\ldots\},$$

na níž je definována binární operace („násobení“)

$$(g_1, g_2) \text{ a } \quad g_3 \equiv g_2 \circ g_1$$

s následujícími vlastnostmi:

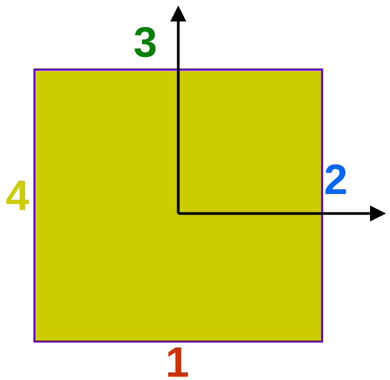
1. $g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1$ (asociativita)
2. $g \circ 1 = 1 \circ g = g$ (existence jednotkového elementu)
3. $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = 1$ (existence inverzního elementu pro každý element g)



Mezi požadované vlastnosti nepatří komutativita !

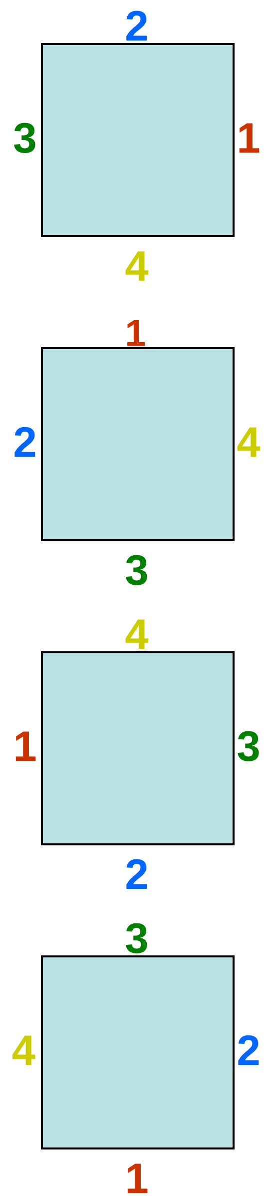
Symetrie čtverce

Cyklická grupa Z_4 (diskrétní)



Otočení o úhel
φ = násobek 90^o

Grupová operace:
skládání otočení



$$g_1 \equiv g(90^o) = g_3^{-1}$$

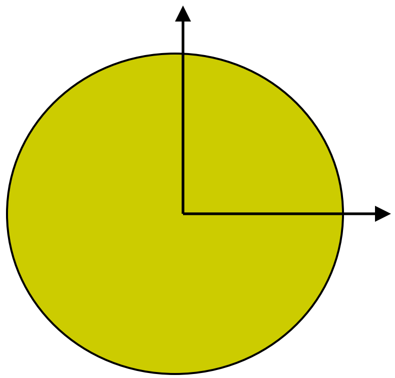
$$g_2 \equiv g(180^o) = g_2^{-1}$$

$$g_3 \equiv g(270^o) = g_1^{-1}$$

$$g_4 \equiv g(360^o) = 1$$

Symetrie kruhu

Unitární grupa U(1) (spojitá)



Sophus Lie (1842-1899)

Otočení o úhel
φ = [0°,360°)

Grupová operace:
skládání otočení

$$g^{-1}(\varphi) = g(360° - \varphi)$$
$$g(360°) = 1$$

Lieova grupa

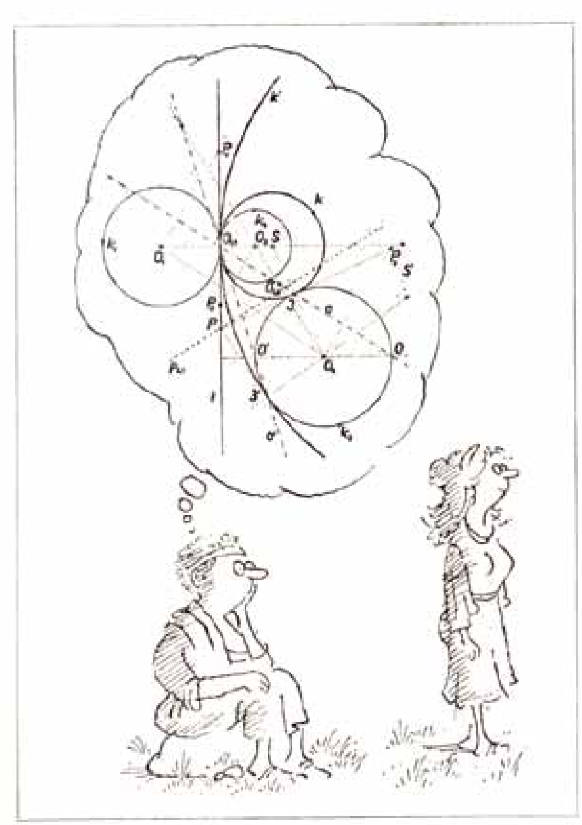
$$g(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) = e^{i \sum_k \varphi_k G_k}$$

Algebra

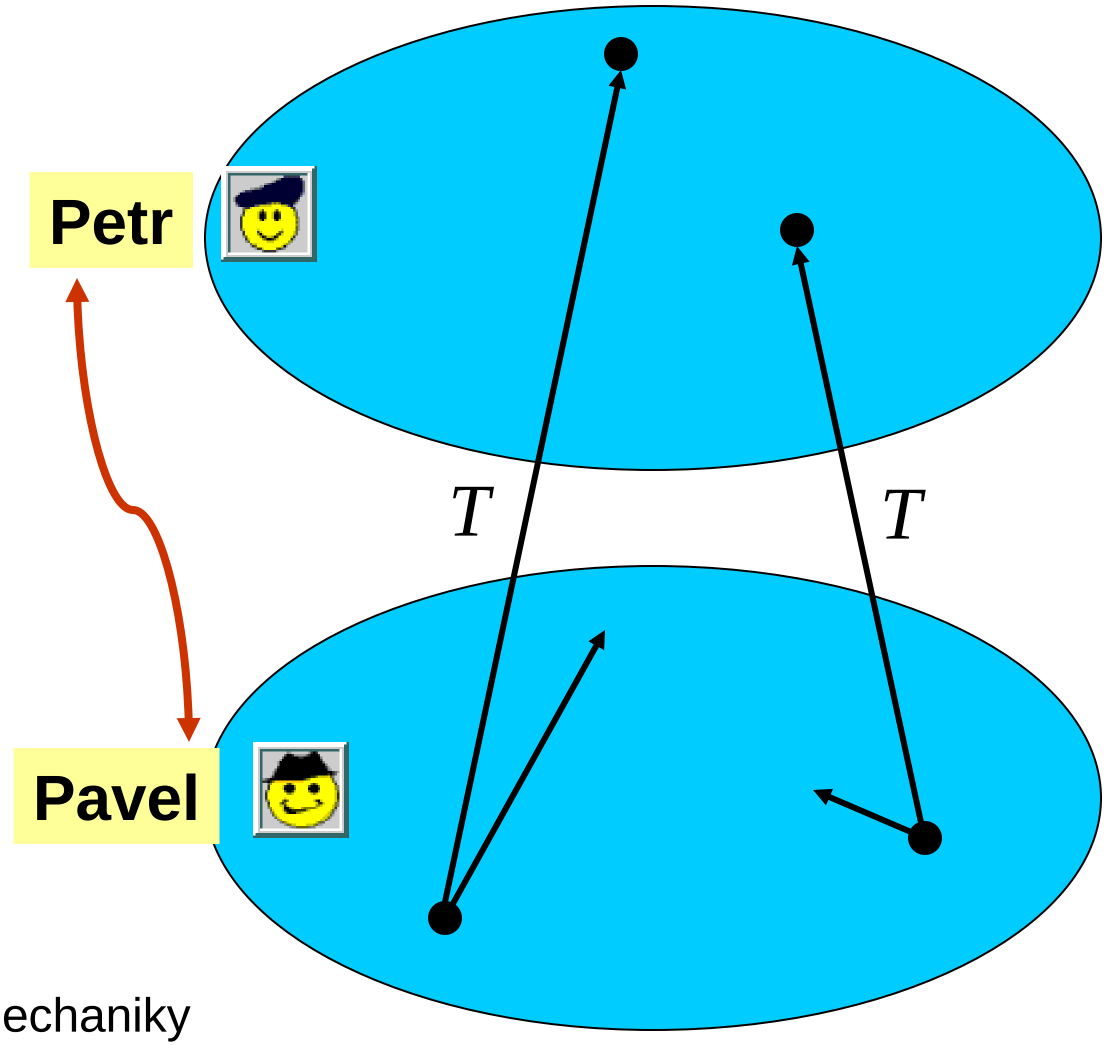
$$[G_i, G_j] = \sum_k c_{ijk} G_k$$

$$[a,b] = ab - ba$$

Transformace mezi vztažnými soustavami



Matematická reprezentace reality – **stavový prostor**



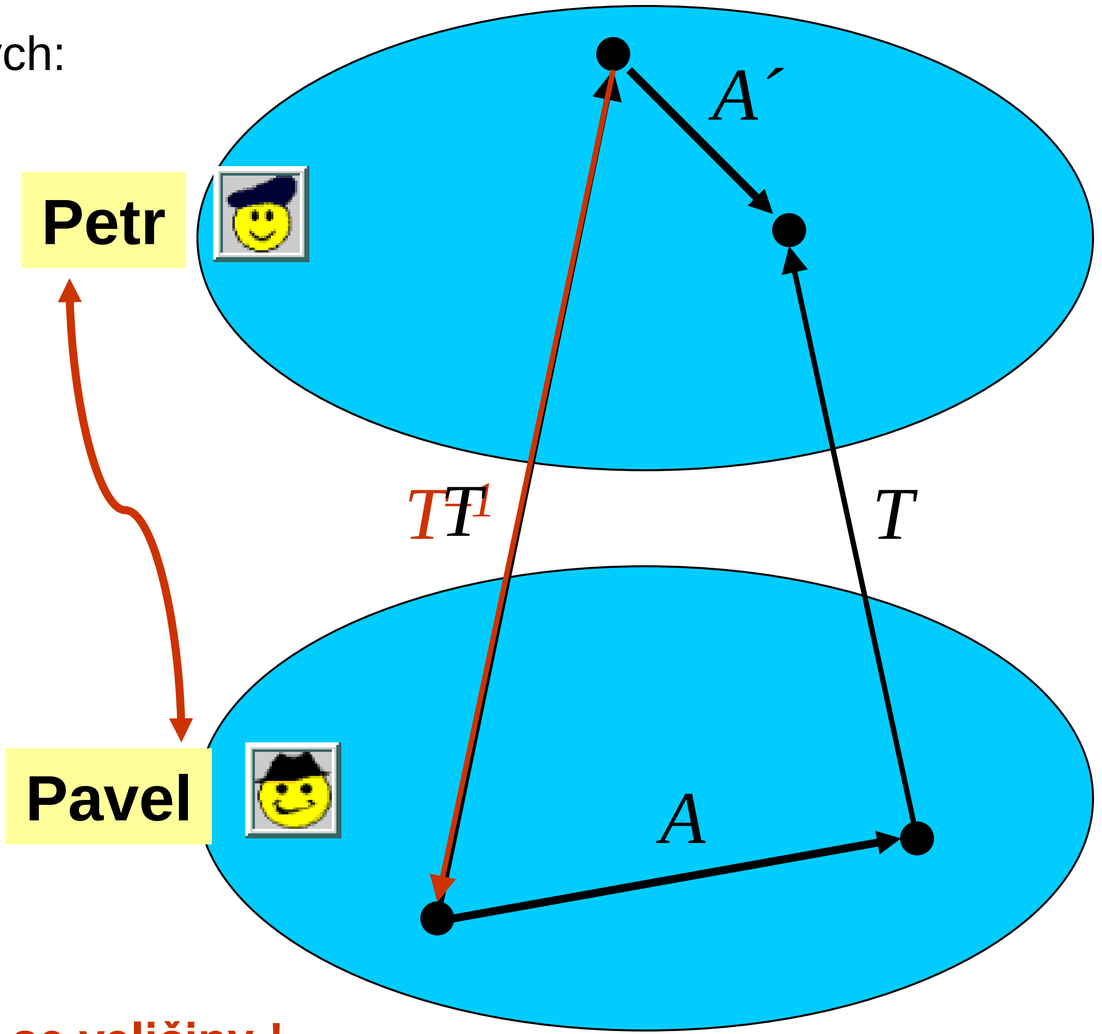
Fázový prostor klasické mechaniky
Hilbertův prostor kvantové mechaniky

Transformace mezi vztažnými soustavami

Matematická reprezentace reality – **stavový prostor**

Transformace pozorovatelných:

$$\boxed{A' = T \times A \times T^{-1}}$$



Symetrie systému vůči
transformaci $\boldsymbol{T}$
Þ nemění se hamiltonián $\boldsymbol{H}$

$$H' = H$$

$$T \times H \times T^{-1} = H$$

$$\boxed{T \times H = H \times T}$$

$\boldsymbol{T}$ komutuje s $\boldsymbol{H}$
Þ **existence zachovávající se veličiny !**

Teorém Noetherové (1918)

Emmy Noether (1882-1935)

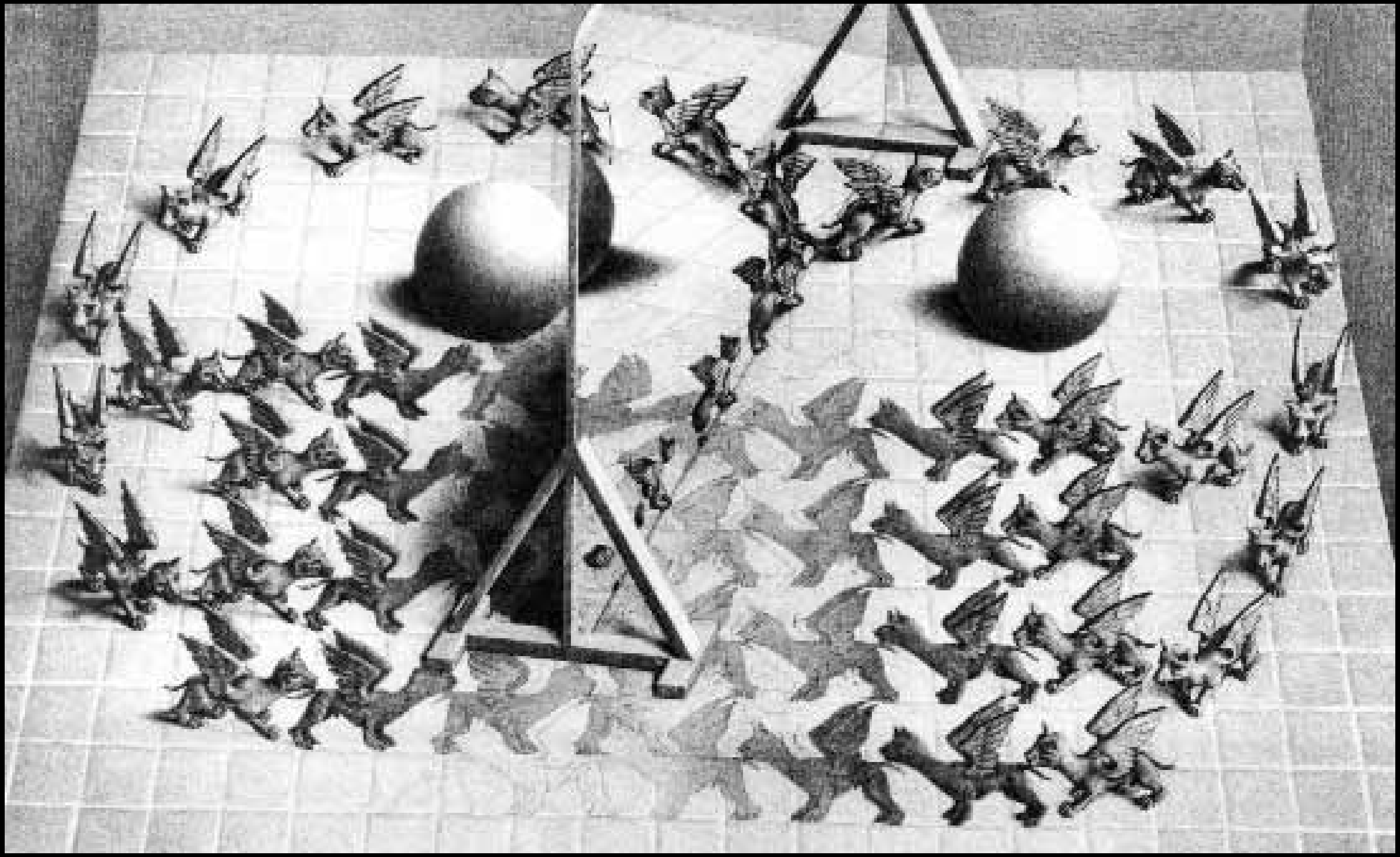
Symetrie systému popsaná Lieovou grupou s ***n*** spojitými parametry

ß

Existence ***n*** zachovávajících se fyzikálních veličin

Typy symetrie ve fyzice

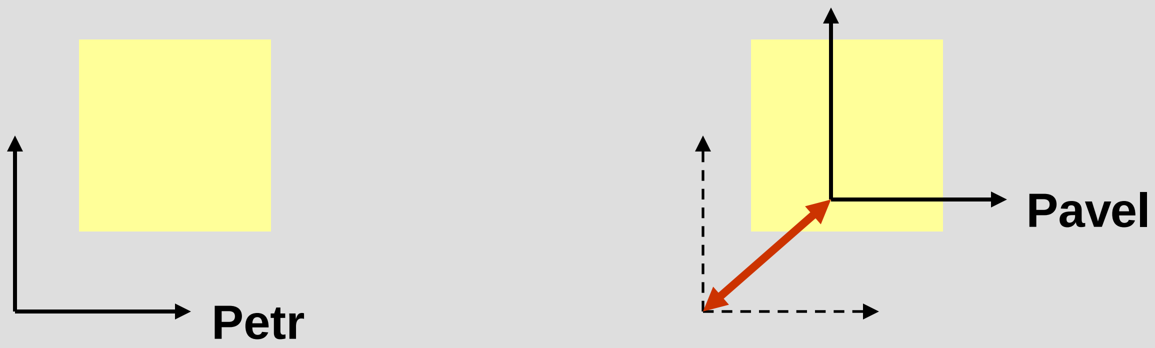
- Časoprostorové symetrie
- Paritní symetrie
- Kalibrační symetrie
- Dynamické symetrie
- Supersymetrie
- ....



M.C.Escher (1898-1972)

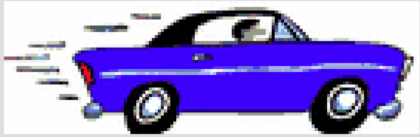
Časoprostorové symetrie

Typ transformace: **posunutí v prostoru**



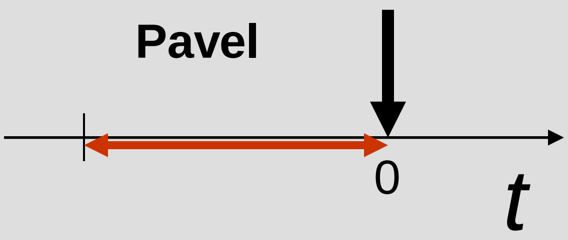
Zachovávající se veličina: **celková hybnost**

$$\vec{p} \equiv (p_1, p_2, p_3)$$



Časoprostorové symetrie

Typ transformace: **posunutí v čase**

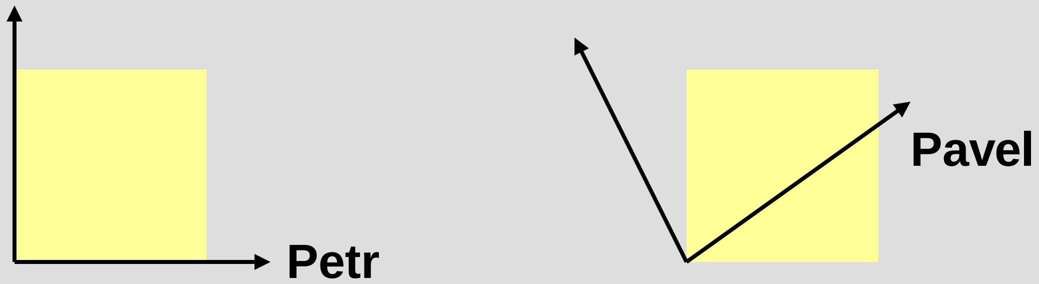


Zachovávající se veličina: **celková energie**

$$E$$

Časoprostorové symetrie

Typ transformace: <u>rotace v prostoru</u>



Zachovávající se veličina: <u>celkový moment hybnosti</u>

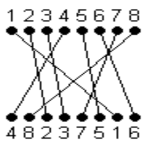
$$\vec{J} \equiv (J_1, J_2, J_3)$$

Prostorové rotace pro bosony a fermiony

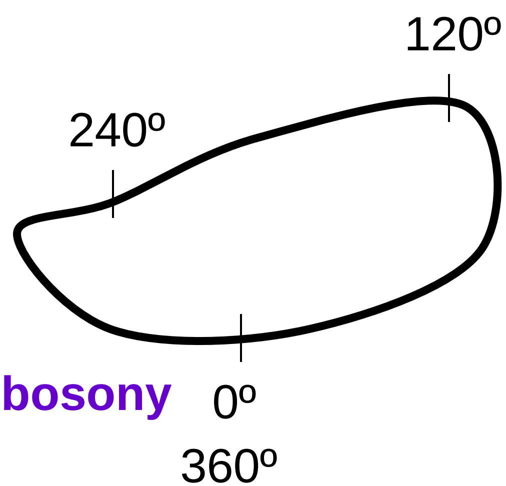
Nerozlišitelné kvantové částice

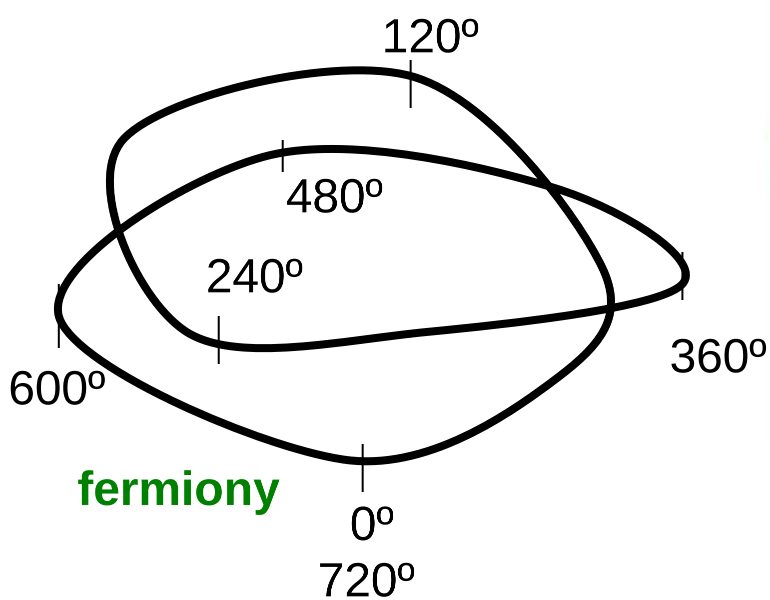
Bosony
(S.Bose, 1894-1974)

Fermiony
(E.Fermi, 1901-1954)



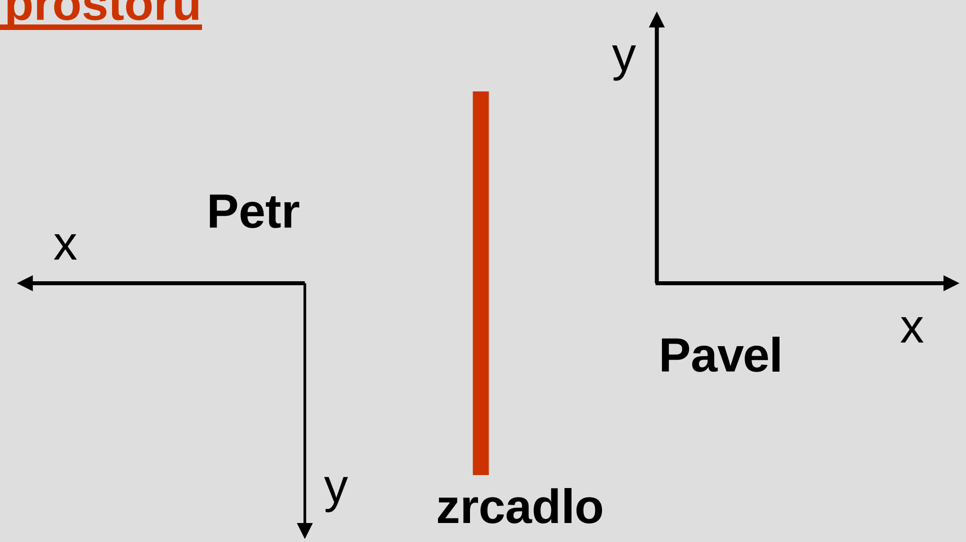
Symetrie vůči permutační grupě
Bosony – vlnová funkce symetrická vůči záměnám
Fermiony – vlnová funkce antisymetrická vůči záměnám





Časoprostorové symetrie

Typ transformace: <u>**inverze prostoru**</u>



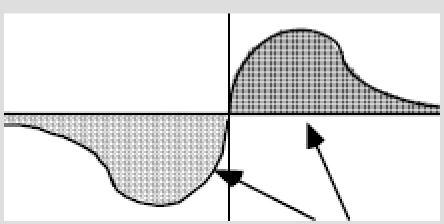
Zachovávající se veličina: <u>**prostorová parita**</u>

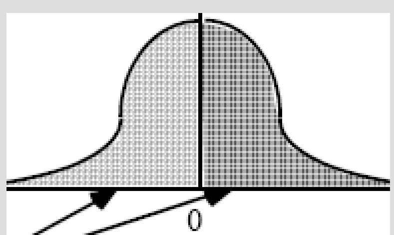
$$p = +1$$

$$- 1$$

NE !!!

(pro slabé interakce)



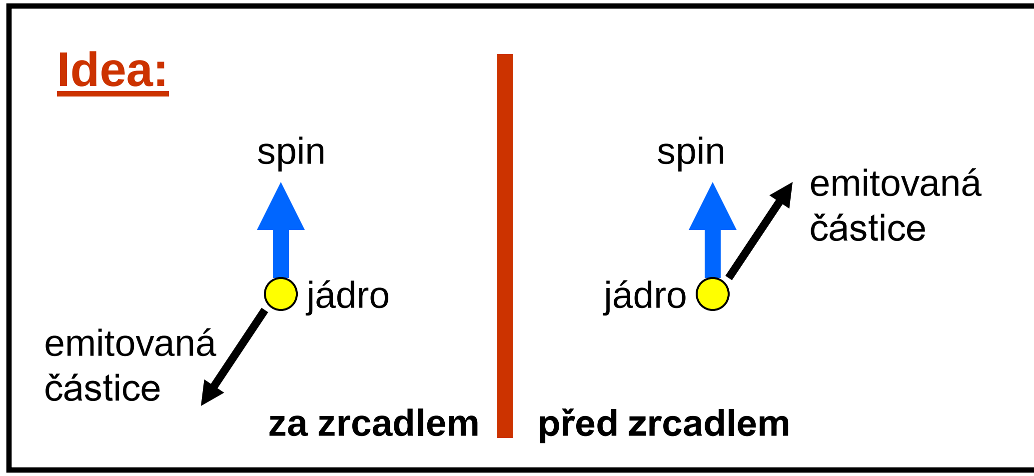


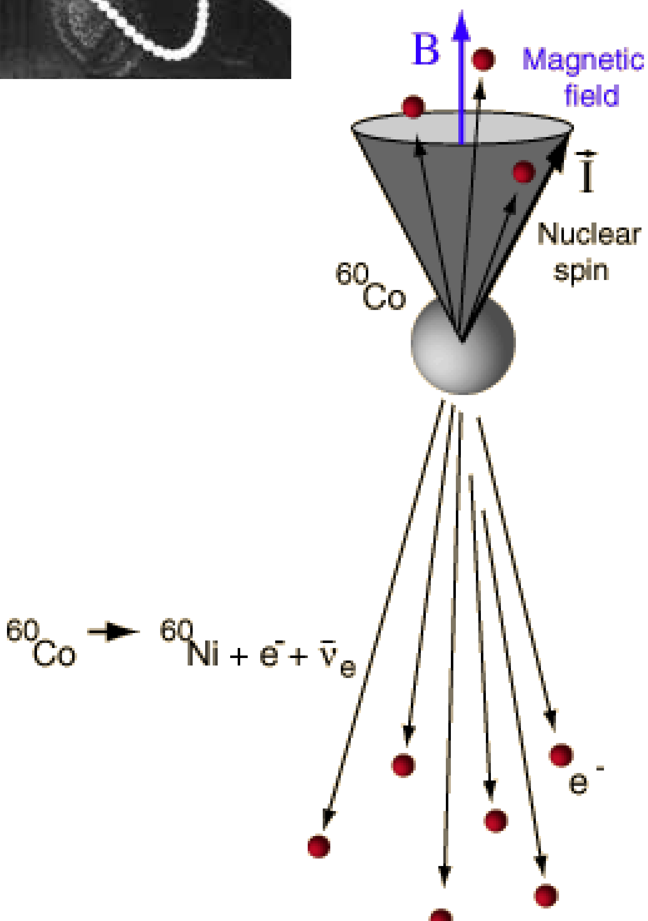
$p = +1$

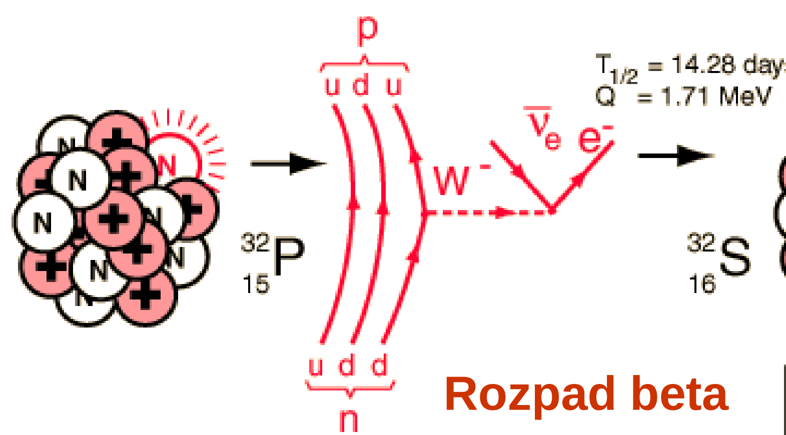
$p = - 1$

C.S.Wu (1912-1997)

Experimentální detekce nezachování parity (1957)







Rozpad beta

C 6	N 7	O 8	F 9
Si 14	P 15	S 16	Cl 17
Ge 32	As 33	Se 34	Br 35

Paritní symetrie

Typ transformace: <u>**inverze prostoru**</u>

Zachovávající se veličina: <u>**prostorová parita**</u>

NE !!!

(pro slabé interakce)

Typ transformace: <u>**záměna částic za antičástice**</u> **+** <u>**inverze prostoru**</u> **(CP)**

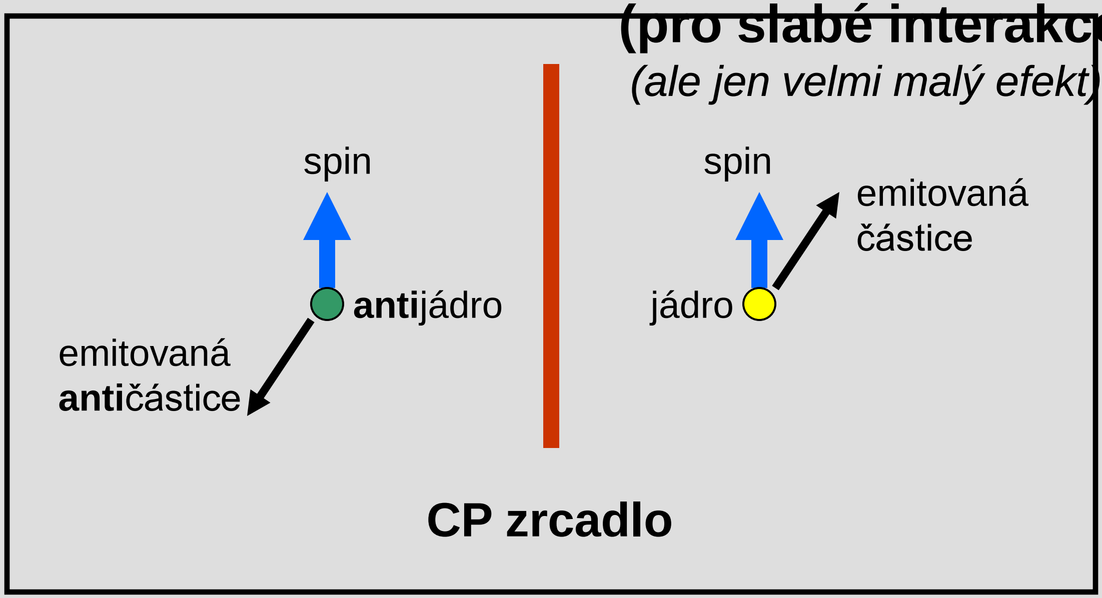
Zachovávající se veličina: <u>**kombinovaná (CP) parita**</u>

?

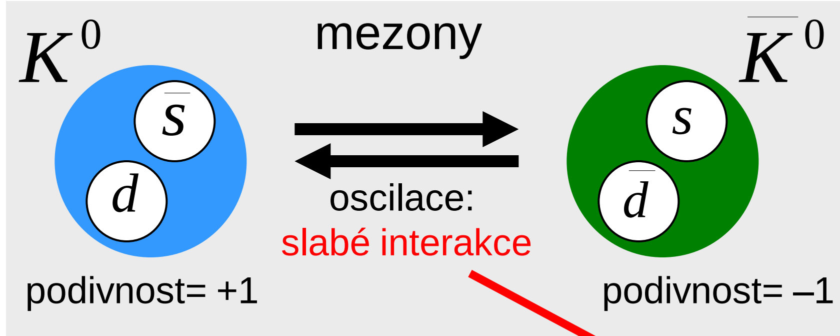
NE !!!

(pro slabé interakce)

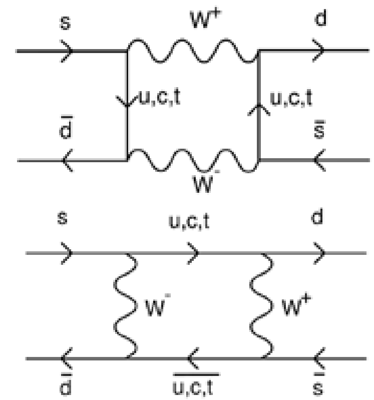
(ale jen velmi malý efekt)



produkce: silné interakce



rozpad: slabé interakce



K^0 a $\bar{K}^0$ nemají určené hodnoty CP-parity:

$$CP\left|K^0\right\rangle = -\left|\bar{K}^0\right\rangle \qquad CP\left|\bar{K}^0\right\rangle = -\left|K^0\right\rangle$$

K_1 a K_2 mají určené hodnoty CP-parity:

$$\left|K_1\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K^0\right\rangle - \left|\bar{K}^0\right\rangle\right) \qquad \left|K_2\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K^0\right\rangle + \left|\bar{K}^0\right\rangle\right)$$

$$CP\left|K_1\right\rangle = +\left|K_1\right\rangle \qquad CP\left|K_2\right\rangle = -\left|K_2\right\rangle$$

Při zachování *CP* by K_1 a K_2 odpovídaly stacionárním módům oscilací.
Také rozpady těchto módů zachovávají CP.

$$\left|K_1\right\rangle \to \pi\pi \qquad \left|K_2\right\rangle \to \pi\pi\pi, \pi\mu\nu, \pi e\nu$$

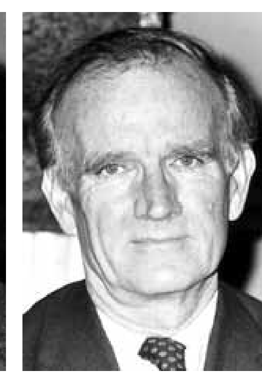
$$\tau_S \approx 0.9 \times 10^{-10}\,\mathrm{s} \qquad \tau_L \approx 5.2 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

$$\tau_S c \approx 3\,\mathrm{cm} \qquad \tau_L c \approx 15\,\mathrm{m}$$

Skutečnost: stacionární módy oscilací narušují CP:

$$\left|K_S\right\rangle \propto \left|K_1\right\rangle - \varepsilon\left|K_2\right\rangle \qquad \left|K_L\right\rangle \propto \left|K_2\right\rangle + \varepsilon\left|K_1\right\rangle \qquad \varepsilon \approx 2.3 \times 10^{-3}$$

Proto se dají pozorovat také *ππ* rozpady mezonu K_L (45 eventů z 22700). Experimentálně potvrzeno **1964** → 1980 Nobelova cena



JW Cronin (1931-) VL Fitch (1923-)

Paritní symetrie

Typ transformace: **inverze prostoru**

Zachovávající se veličina: **prostorová parita**

NE !!!

(pro slabé interakce)

Typ transformace: **záměna částic za antičástice + inverze prostoru** **(CP)**

Zachovávající se veličina: **kombinovaná (CP) parita**

NE !!!

(pro slabé interakce)

(ale jen velmi malý efekt)

Typ transformace: **záměna částic za antičástice + inverze prostoru + inverze času** **(CPT)**

SNAD ANO ?

Typ transformace: **inverze času**

PRAVDĚPODOBNĚ NE ?

(pro slabé interakce)

(ale jen velmi malý efekt)

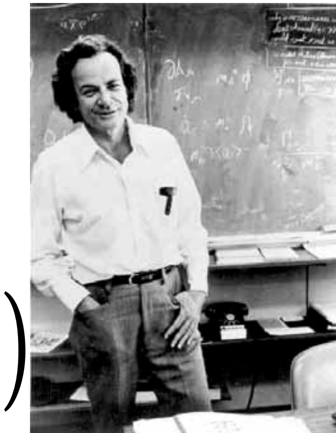
Proč svět není symetrický vzhledem k CP zrcadlení?

Protože kdyby byl, tak by se tomu neměl kdo divit!

Narušení CP symetrie je pravděpodobnou příčinou přebytku hmoty nad antihmotou v raném vesmíru.

Kalibrační symetrie

R.P. Feynman (1918-1988)



Příklad: **kvantová elektrodynamika (QED)**

$$L = \left(i\hbar c\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^{2}\bar{\psi}\psi\right) + \left(-\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + \left(-q[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi]A_{\mu}\right)$$

Popisuje pole elektronů a pozitronů

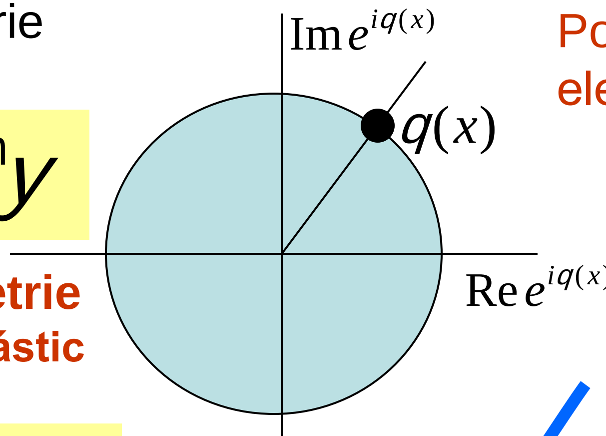
Popisuje pole fotonů $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$

Popisuje **interakce** elektronů, pozitronů a fotonů

Požadavek symetrie vůči transformaci

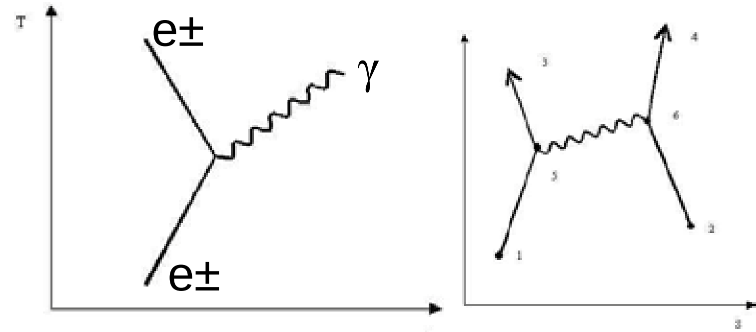
$$\psi \rightarrow e^{iq\theta(x)/\hbar}\psi$$

Lokální U(1) symetrie pro pole nabitých částic



$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\theta$$

Kalibrační symetrie elektromagnetického pole



Zachovávající se veličina: **elektrický náboj**

Dynamické symetrie

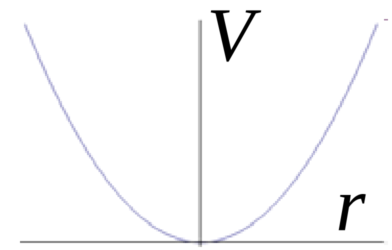
Konkrétní fyzikální systémy mohou mít větší symetrie než jen zmíněné časoprostostorové symetrie: $G_{\text{dynamika}} \supset G_{\text{časoprostor}}$

Příklad 1: **Harmonický oscilátor**

$$E = \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 + \frac{k}{2}|\vec{x}|^2$$

U(3) $\supset$ SO(3)

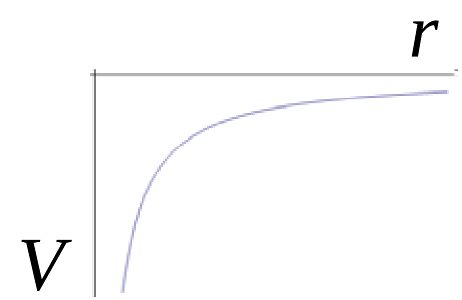
$$\vec{z} = \sqrt{\frac{k}{2}}\,\vec{x} + \frac{i}{\sqrt{2m}}\,\vec{p} \quad \Rightarrow \quad E = |\vec{z}|^2$$

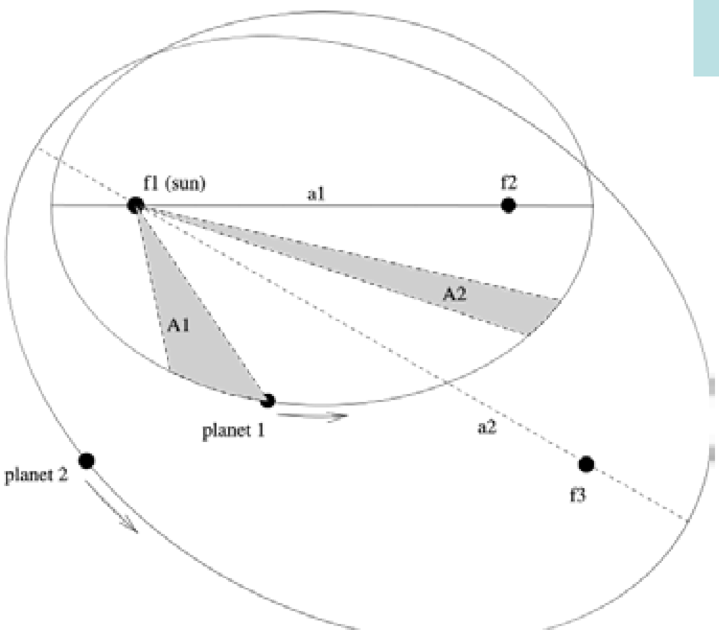


Příklad 2: **Keplerův systém**

$$E = \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 - k\frac{1}{|\vec{x}|}$$

SO(4) $\supset$ SO(3)





J.Kepler (1571-1630)

Budoucnost: Supersymetrie?

Bosony [x,y]=z

supergrupa / superalgebra

z={x,y} **Fermiony**

foton gluon Z, W…
selektron ***sneutrino*** ***skvark***…

[sudý,sudý]=sudý
[sudý,lichý]=lichý
{lichý,lichý}=sudý

{lichý,lichý}=sudý
[sudý,lichý]=lichý
[sudý,sudý]=sudý

fotino ***gluino*** ***Zino,Wino***…
elektron neutrino kvark…

Komutativitu porušují nejen elementy g(φ), ale i proměnné φ:

$$j_1 \times j_2 = j_2 \times j_1$$

obyčejné proměnné

$$f_1 \times f_2 = - f_2 \times f_1$$

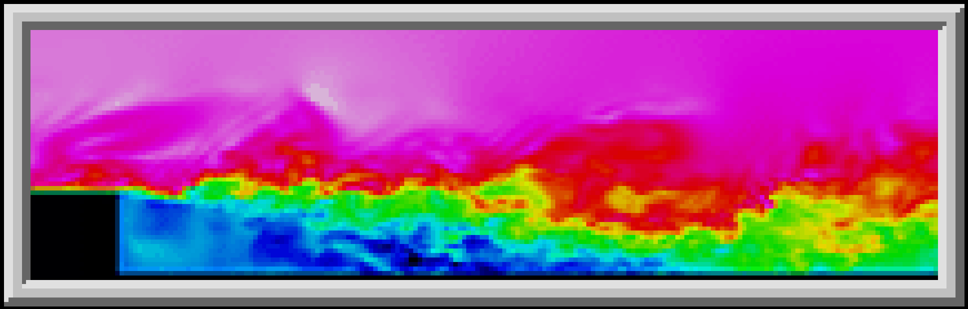
$$f^2 = 0$$

$$j \times f = f \times j$$

Grassmanovy proměnné

H.G.Grassmann
(1809-1877)

Absence symetrie: Chaos?



Ne! I chaos má své skryté symetrie, svou matematiku. Možná ještě mnohem krásnější než „sphairos“!

Podle Empedokla (cca.490-430 př.n.l.) se reálný svět *(Cosmos)*
rodí střetem světa dokonalého pořádku *(Sphairos)*
se světem naprostého nepořádku *(Chaos)*.

I had a feeling once about Mathematics, that I saw it all—Depth beyond depth was revealed to me—the Byss and the Abyss. I saw, as one might see the transit of Venus—or even the Lord Mayor's Show, a quantity passing through infinity and changing its sign from plus to minus. I saw exactly how it happened and why the tergiversation was inevitable: and how the one step involved all the others. It was like politics. But it was after dinner and I let it go!

Winston Chirchill, *My Early life: 1874 - 1904*