SYMETRIE V MIKROSVĚTĚ

PAVEL CEJNAR

Nejnepochopitelnější věcí na světě je, že svět je pochopitelný.
Albert Einstein

Dokud nepřestaneš stoupat, nepřestanou ani schody,
rostou do výše pod tvýma stoupajícíma nohama.
Franz Kafka

1 Symetrie a fyzika

Hlavní myšlenka tohoto příspěvku se dá zhruba shrnout do následující zrcadlové dvojice tvrzení:

Příroda vytváří symetrie – symetrie tvoří přírodu.

O pravdivosti první věty asi nemusím nikoho přesvědčovat – stačí se podívat na geometrickou krásu květů nebo sněhových vloček. Bude nás zajímat spíše druhá část tvrzení, která symetrii povyšuje na základní princip přírody. Nejde o přehánění. Podle současných představ jsou totiž všechny fyzikální zákony jen *důsledkem* jistých symetrií kladených na základní fyzikální rovnice.

Co vlastně slovo symetrie znamená? Výstižnou definici podal německý fyzik a matematik Hermann Weyl, jeden z prvních propagátorů fundamentální role symetrií ve fyzice [1]:

A thing is symmetrical if there is something you can do to it so that after you have finished doing it it looks the same as before.[1]

Poněkud akademičtěji vyjádřeno: symetrie je neměnnost (invariance) formy daného objektu při nějaké transformaci. Nemusí přitom nutně jít o geometrickou formu objektu a pod transformací si nemusíme představovat jen prostorovou transformaci jako otočení či zrcadlení. V moderním pojetí se symetrie mohou týkat také libovolných matematických rovnic (např. těch, které vyjadřují fyzikální zákony), přičemž transformace představují různé více či méně abstraktní operace týkající se jednotlivých elementů či celkové formy těchto rovnic. Jestliže tvar dané rovnice zůstane po provedení příslušné operace stejný, jak požaduje Weylova definice, jedná se o symetrii [2].

Matematickým jazykem symetrie je *teorie grup* [3]. Tato disciplína je jedním z nejpregnantnějších příkladů "nepochopitelné účinnosti matematiky" v přírodních vědách. Její základy byly postupně pokládány od 18. do začátku 20. století, ale teprve moderní fyzika docenila fundamentální roli teorie grup v přírodě.

[1] Tuto větu je škoda kazit překladem, ale budiž: "Věc je symetrická, pokud se s ní dá udělat něco takového, že i po dokončení toho udělání vypadá stejně jako předtím."

Zhruba řečeno, grupa je množina prvků (budeme si pod nimi představovat transformace), která je uzavřená vzhledem k vhodně definované operaci násobení (tou rozumíme skládání transformací). To znamená, že (i) jsou-li g_1 a g_2 dva prvky grupy $\mathcal{G}$, pak také součin $g_2 \cdot g_1 \equiv g_3$ (složená transformace "g_1 následované g_2") je prvkem $\mathcal{G}$. Kromě toho se požaduje (ii) asociativita, $(g_3 \cdot g_2) \cdot g_1 = g_3 \cdot (g_2 \cdot g_1)$, (iii) existence jednotkového elementu, $\exists!\, \mathbf{1} \in \mathcal{G} : (\forall g \in \mathcal{G} : g \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot g = g)$, a (iv) existence inverzních elementů, $\forall\, g \in \mathcal{G}\, \exists!\, g^{-1} \in \mathcal{G} : (g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = \mathbf{1})$. Komutativita *není* obecným axiomem grupy (grupa, která ji náhodou splňuje, se nazývá abelovská), což má ve fyzice velmi důležité důsledky.

Jednoduchým příkladem grupy je třeba cyklická grupa Z_k, popisující symetrii k-úhelníku, kde $k = 3, 4, \ldots$. Tato grupa (při zvoleném způsobu interpretace) obsahuje rotace o libovolný kladný celočíselný násobek úhlu $\phi = 2\pi/k$ (modulo 2π), přičemž grupové násobení znamená prosté řetězení jednotlivých rotací. Ověřit splnění všech definičních vlastností grupy, včetně identifikace jednotkového a inverzních prvků, je v tomto případě víc než snadné. Pro libovolné konečné k se jedná o diskrétní, konečnou grupu o k prvcích.

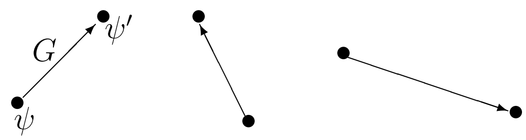
Diskrétní grupy se na obecné úrovni používají např. k popisu symetrií krystalů. Grupa symetrie kruhu je naopak nejjednodušším příkladem spojité (Lieovy) grupy s nekonečným počtem elementů.[2] Lieovy grupy se v obecném případě dají charakterizovat pomocí n spojitých parametrů $\phi_1, \ldots, \phi_n$. V případě kruhu, kdy $n = 1$ (jediným parametrem je úhel rotace), se jedná o grupu označovanou jako O(2), tedy grupu dvourozměrných ortogonálních matic, která je izomorfní s unitární grupou U(1) rotací komplexní roviny (násobení číslem $e^{i\phi}$).

V rovinném případě jsou všechny výše popsané rotační grupy Z_k a $O(2)$ abelovské, tj. jejich elementy vzájemně komutují. Ve tří- či vícerozměrném prostoru však rotace kolem jednotlivých os nekomutují, o čemž se pro grupu O(3) třírozměrných rotací ($n = 3$) dá snadno přesvědčit jednoduchým pokusem: provedete-li dvě rotace, označme je jako R_1 a R_2, nějakého (ne zcela symetrického) objektu kolem dvou různých prostorových os v opačném pořadí, výsledek obecně nebude týž. Tedy $R_2 \cdot R_1 \neq R_1 \cdot R_2$. Tato jednoduchá skutečnost, vyplývající z fundamentálních vlastností prostoru, je příčinou relativní složitosti matematického popisu rotačního pohybu jak v klasické, tak v kvantové fyzice (ve srovnání např. s popisem translačního pohybu, který je reprezentován abelovskou grupou). Existují úvahy o tom, že neabelovská povaha základních symetrií přírody souvisí se základy kvantové mechaniky, podle níž nekomutující veličiny podléhají relacím neurčitosti [4].

2 Symetrie v kvantové mechanice

Prvky grupy lze vždy realizovat jako operátory v nějakém vektorovém prostoru, tj. jako vhodná zobrazení tohoto prostoru na sebe:

[2] Tato grupa se zjevně podobá limitě Z_k pro $k \to \infty$, ovšem s tím rozdílem, že spočetné nekonečno je nahrazeno nekonečnem spojitým.



(tečky představují jednotlivé vektory a šipky operátory). Tím se přirozeně dostáváme na půdu kvantové teorie [2, 5], protože matematickým prostorem reprezentujícím stavy fyzikálních objektů[3] (zkráceně: stavovým prostorem) je v kvantovém případě tzv. Hilbertův prostor, tj. vektorový prostor splňující jisté dodatečné vlastnosti.[4] Zatímco tedy jednotlivé vektory ψ tohoto prostoru odpovídají možným stavům popisovaného fyzikálního systému, grupová operace g je realizována transformací $\psi \to \psi' \equiv G\psi$, kde G je operátor přiřazený elementu g. Pod touto transformací si budeme představovat změnu stavových vektorů při přechodu od vztažné soustavy S k soustavě $S' \equiv gS$ (tj. k soustavě lišící se od S právě příslušnou grupovou operací g, např. natočením či posunem v obyčejném prostoru).

V kvantové teorii jsou ovšem pomocí operátorů vyjádřeny i pozorovatelné veličiny. Uvažujme veličinu A spojenou se stejnojmenným operátorem. Transformace této veličiny, resp. jejího operátoru, při přechodu od soustavy S k S' se dá vyjádřit pomocí následujícího schématu:

$$\begin{tikzcd}
\psi' = G\psi \arrow[r, "A'"'] & A'\psi' = A'(G\psi) = G(A\psi) \\
\psi \arrow[u, "G"] \arrow[r, "A"] & A\psi \arrow[u, "G"']
\end{tikzcd}$$

Zde čárkované objekty ψ' a A' (v horní části obrázku) představují stavový vektor a operátor "viděné" ze soustavy S' a naopak dolní část obrázku zobrazuje ψ a A v soustavě S. Z obrázku plyne, že $A'\psi' = GA\psi = GAG^{-1}\psi'$, tedy

$$A' = GAG^{-1} \; , \tag{1}$$

kde G^{-1} označuje inverzní operátor. Představme si to tak, že cesta z ψ' do $A'\psi'$ se dá realizovat oklikou přes body ψ a $A\psi$, k čemuž je ovšem nejprve zapotřebí obrátit směr levé šipky G.

Kdy je systém vůči transformacím grupy $\mathcal{G}$ invariantní? Z fyzikálního hlediska nejdůležitější operátor je tzv. hamiltonián, který odpovídá celkové energii systému. Hamiltonián H určuje dynamiku stavového vektoru ψ_t v čase t prostřednictvím evoluční rovnice

$$\psi_t = \underbrace{e^{-iHt/\hbar}}_{U_t}\psi_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t = H\psi_t \; , \tag{2}$$

[3] Pod pojmem stav rozumíme nejúplnější charakteristiku fyzikálních vlastností systému.

[4] Vektorový charakter kvantového stavového prostoru zaručuje splnění principu superpozice, klíčového postulátu kvantové mechaniky, podle něhož libovolná lineární kombinace dvou nebo více stavů opět reprezentuje možný stav systému. Z dodatečných vlastností je nejpodstatnější existence skalárního součinu, pomocí něhož se vyjadřují kvantové amplitudy pravděpodobnosti.

kde $\hbar$ je Planckova konstanta (rovnice na pravé straně ekvivalence je časová Schrödingerova rovnice). "Invariance systému" vůči dané grupě transformací znamená, že hamiltonián zůstává při operacích patřících do $\mathcal{G}$ beze změny, tj. $H' = H$. To je fyzikální definice symetrie vzhledem ke $\mathcal{G}$. Odtud a z rovnice (1) plyne, že v tom případě musí platit

$$H = GHG^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad HG - GH \equiv [H, G] = 0 \ . \tag{3}$$

Symetrie vůči grupě $\mathcal{G}$ tedy vyžaduje, aby hamiltonián komutoval se všemi operátory odpovídajícími prvkům grupy.

Nulovost komutátoru v rovnici (3) má následující fyzikálně závažný důsledek: je-li h povolená energie kvantového systému a ψ odpovídající stavový vektor, tj. je-li splněna stacionární Schrödingerova rovnice $H\psi = h\psi$ (rovnice pro vlastní čísla a vlastní vektory operátoru H), pak $\psi' = G\psi$ je také vlastním vektorem operátoru H *se stejným vlastním číslem* h. To znamená, že energetické spektrum je degenerované – stejné energii odpovídá několik možných vlastních stavů. Ve skutečnosti je těchto stavů nekonečně mnoho a dokonce tvoří lineární podprostor stavového Hilbertova prostoru, neboť je-li splněno $H\psi = h\psi$ a zároveň $H\psi' = h\psi'$, pak také pro $\psi'' = \alpha\psi + \alpha'\psi'$ (kde α, α' jsou libovolné koeficienty) platí $H\psi'' = h\psi''$. Symetrie implikuje mnohačetnou degeneraci energetických hladin.[5]

Pro každou grupu existuje jistá minimální, tzv. ireducibilní (tedy "neredukovatelná") reprezentace pomocí vektorového prostoru. V případě, že grupa $\mathcal{G}$ představuje grupu symetrie daného fyzikálního systému, ireducibilní reprezentace se realizují na podprostorech stavového Hilbertova prostoru, které odpovídající degenerovaným vlastním číslům h. Známe-li libovolný ze stavových vektorů patřících do daného podprostoru degenerace, např. vektor ψ_0, pak působením všech operátorů G odpovídajících prvkům grupy $\mathcal{G}$ na tento vektor postupně vygenerujeme celý degenerační podprostor. Operátory G však nikdy nespojují vektory ležící v různých degeneračních podprostorech, takové působení by bylo ve sporu s rovnicí (3).

Existuje přístup, jenž na *celý* stavový Hilbertův prostor obecného systému pohlíží jako na prostor ireducibilní reprezentace nějaké dostatečně velké grupy $\overline{\mathcal{G}}$. Tato grupa se nazývá dynamická grupa, protože z jediného stavového vektoru ψ_0 je schopna vygenerovat *všechny* dynamicky přípustné stavy systému. Případné grupy symetrie systému jsou podgrupami dynamické grupy, $\overline{\mathcal{G}} \supset \mathcal{G}$, a různé ireducibilní reprezentace $\overline{\mathcal{G}}$ představují ekvivalentní možnosti kvantového popisu. Algebraické metody založené na dynamických grupách našly četné aplikace v molekulové, jaderné i částicové fyzice [7, 8]. Ambicióznější přístup se snaží pomocí dynamických grup zformulovat celou kvantovou fyziku [9]. Je-li to skutečně možné, pak symetrie představují vskutku nejuniverzálnější jazyk přírody.

[5]Stupeň degenerace dané hladiny je určen dimenzí degeneračního podprostoru.

3 Teorém Noetherové

V roce 1915 dokázala německá matematička Emmy Noether slavný teorém [6], který se stal jedním z nejdůležitějších pilířů moderního pojetí fyziky. Jeho obsah se dá vyjádřit zhruba takto:

Je-li daný fyzikální systém symetrický vzhledem k nějaké Lieově grupě o n spojitých parametrech, pak tento systém vykazuje zachování n nezávislých fyzikálních veličin.

Zákony zachování, určitě jeden z nejdůležitějších typů fyzikálních tvrzení, se tak dostávají do přímé souvislosti s konceptem symetrie.

Platnost teorému Noetherové můžeme snadno dokázat v rámci kvantové mechaniky. Myšlenku důkazu zde pouze načrtneme. Ze symetrie systému vůči operacím nějaké Lieovy grupy $\mathcal{G}$ vyplývá, že existuje alespoň jedna veličina (obecně jich je n), jejíž operátor A komutuje s hamiltoniánem,[6] tedy $[H, A] = 0$. Jak hamiltonián H, tak operátor A se dají vyjádřit ve tvaru tzv. spektrálního rozkladu: $H = \sum_h hP_h$ a $A = \sum_a aP_a$, kde obě sumy běží přes všechny vlastní hodnoty příslušného operátoru a $P_\bullet$ představují projekční operátory na příslušné vlastní podprostory. Dá se ukázat, že vlastnost $[H, A] = 0$ je ekvivalentní podmínce $[P_h, P_a] = 0$ pro všechny vlastní hodnoty h a a. Předpokládejme, že systém se v čase $t = 0$ nachází ve stavu popsaném vektorem ψ_0. Pravděpodobnostní rozdělení pro naměření jednotlivých možných hodnot a veličiny A se získá ze skalárního součinu[7] $p_0(a) = (\psi_0, P_a\psi_0)$. Obdobné pravděpodobnostní rozdělení v libovolném čase t je pak dáno rovnicí

$$\begin{aligned} p_t(a) = (\psi_t, P_a\psi_t) = (U_t\psi_0, P_aU_t\psi_0) &= (e^{-iHt/\hbar}\psi_0, P_ae^{-iHt/\hbar}\psi_0) \\ &= (\psi_0, \underbrace{e^{+iHt/\hbar}P_ae^{-iHt/\hbar}}_{P_a}\psi_0) = p_0(a)\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Zde jsme v prvním řádku využili evoluční rovnice (2), v druhém relací $(U\psi, \psi') = (\psi, U^\dagger\psi')$ a nakonec $[P_h, P_a] = 0$. Tím jsme dokázali, že pravděpodobnostní rozdělení veličiny A se s časem nemění – veličina A se tedy zachovává.[8] Zdůrazněme, že teorém Noetherové platí také v klasické mechanice a v klasické i kvantové teorii pole.

Zde jsou nejdůležitější časoprostorové symetrie a jim odpovídající zákony zachování:

[6] Grupové operace se ve stavovém Hilbertově prostoru dají vyjádřit pomocí unitárních operátorů obecného tvaru $G = \exp(-i\sum_{j=1}^{n} A_j\phi_j)$, kde ϕ_j jsou spojité parametry a A_j hermiteovské operátory, které reprezentují v principu pozorovatelné veličiny.

[7] Pro skalární součin vektorů ψ a ψ' zde používáme symbol (ψ, ψ'), přičemž platí $(A\psi, \psi') = (\psi, A^\dagger\psi')$, kde $A, A^\dagger$ je libovolná dvojice hermiteovsky sdružených operátorů.

[8] Provedeme-li v čase $t = 0$ měření veličiny A s výsledkem a, pravděpodobnostní rozdělení $p_0(a)$ zkolabuje do naměřené hodnoty, takže – s ohledem k rovnici (4) – výsledek měření A v libovolném čase $t > 0$ již vždy musí dát stejnou hodnotu.

(a)	homogenita prostoru (invariance vůči posunutí)	$\Leftrightarrow$	zachování hybnosti ($n = 3$)
(b)	izotropie prostoru (invariance vůči rotacím)	$\Leftrightarrow$	zachování momentu hybnosti ($n = 3$)
(c)	homogenita času (invariance vůči posunu času)	$\Leftrightarrow$	zachování energie ($n = 1$)

Bez nadsázky se dá říci, že pravá strana této tabulky tvoří jakési fyzikální trivium – základ všeobecné fyziky. Teorém Noetherové ukazuje, že rovnocenný – a možná hlubší – základ představují příslušné symetrie na straně levé. Jejich splnění je na každé fyzikální teorii *a priori* požadováno. To znamená, že (i) fundamentální interakce mezi částicemi mohou záviset nikoliv na absolutních, ale jen na relativních souřadnicích, tj. na rozdílech $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, kde indexy i, j číslují jednotlivé částice, že (ii) výraz pro celkovou energii (hamiltonián) musí být rotační skalár a že (iii) hamiltonián nesmí explicitně záviset na čase.[9]

Často opakovanou otázkou je, zda z invariance přírody vůči Lorentzově transformaci vyplývají nějaké další zákony zachování. Lorentzova transformace zprostředkuje přechod mezi různými pohybujícími se inerciálními soustavami v rámci speciální teorie relativity.[10] Tyto transformace společně s rotacemi tvoří tzv. Lorentzovu grupu ($n = 6$). Zahrneme-li sem i prostorové a časové translace, dostaneme tzv. grupu Poincarého ($n = 10$). Symetrie popsaná touto obecnou grupou tedy vede i k zákonům zachování již zahrnutým ve výše uvedené tabulce. Symetrie vůči samotným transformacím mezi inerciálními soustavami jsou poněkud složitější, protože tyto transformace explicitně závisejí na čase. Proto negenerují zákon zachování v obvyklém smyslu, ale rovnici popisující pohyb těžiště relativistické soustavy částic (ve speciálním případě, kdy se hmotnost soustavy nemění, z nich tedy vyplývá zákon zachování rychlosti těžiště).

4 Potíže se zrcadlením

Pod pojmem zrcadlení rozumíme transformaci, jejíž grupa obsahuje pouze dva prvky – vlastní operaci zrcadlení, P, a jednotkový element, $\mathbf{1}$ (jedná se o cyklickou grupu Z_2). Platí $P^2 = \mathbf{1}$. Za operací P si můžeme dosadit skutečné zrcadlení prostorových os, ale také různé jiné operace splňující výše popsané vlastnosti, viz následující tabulku:

P	inverze prostoru:	$\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$
T	inverze času:	$t \to -t$
C	nábojové sdružení:	částice$\to$antičástice

Zde operace T a C představují zobecněné typy zrcadlení (obrácení chodu hodin a přechod od hmoty k antihmotě), a stejně tak různé kombinace, jako např. CP

[9] Operátor reprezentující v kvantovém Hilbertově prostoru grupovou operací posunu času o hodnotu t (tím rozumíme současnou změnu nastavení všech hodin) je "starý známý" evoluční operátor U_t v levé části relace (2).

[10] V češtině pro tyto transformace bohužel nemáme stručný termín, analogický v angličtině používanému slovu *boosts*.

(současná prostorová a nábojová inverze) atd.

Přestože zrcadlení netvoří spojitou grupu (takže se na něj nevztahuje teorém Noetherové), v některých případech existuje zachovávající se veličina odpovídající invarianci systému vůči danému typu zrcadlení. Např. pro prostorové zrcadlení P je zachovávající se veličinou prostorová parita, vyjádřená přímo operátorem P. Uvažme vlastní stav parity, ψ, splňující relaci $P\psi = \pi\psi$, kde π je vlastní číslo. Ze vztahu $P^2\psi = \pi^2\psi = \mathbf{1}\psi = \psi$ okamžitě dostáváme $\pi^2 = 1$ a tedy $\pi = \pm 1$. Hodota $\pi = +1$ (-1) odpovídá sudým (lichým) prostorovým vlnovým funkcím. Je-li hamiltonián invariantní vůči inverzi prostorových os, pak se hodnota π (sudost či lichost vlnové funkce) zachovává.

Vzniká přirozená otázka, zda hamiltonián fundamentálních interakcí symetrii vůči prostorovému zrcadlení opravdu splňuje. Vzhledem k platnosti ostatních časoprostorových symetrií se všeobecně předpokládalo, že ano. Skutečná odpověď je *ne*. Invarianci vůči inverzi prostoru narušují slabé interakce, tj. interakce vedoucí např. k rozpadu neutronu na proton, elektron a antineutrino (příklad tzv. β^- rozpadu). V těchto interakcích se tedy parita nezachovává.

Nebudeme zde podrobně popisovat experiment, v němž nezachování parity vyšlo v roce 1957 poprvé najevo (a za nějž madam Wu obdržela Nobelovu cenu za fyziku). Spokojíme se jen s vysvětlením jeho základního triku. Ve fyzice rozeznáváme dva typy vektorů: (i) pravé vektory, které se při rotacích vztažné soustavy transformují stejně jako prostorový vektor $\mathbf{x}$ a při inverzi prostoru také mění znaménko, a (ii) "nepravé" (tzv. axiální) vektory, které se při rotacích otáčejí stejně jako $\mathbf{x}$, ale při inverzi prostoru zůstávají beze změny. Příkladem axiálního vektoru je třeba moment hybnosti.[11] Uvažme vektorovou veličinu $\mathbf{V}$ a axiální vektorovou veličinu $\mathbf{A}$ a sestrojme skalární součin $S = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$. Je jasné, že veličina S se sice tváří jako skalár, ale ve skutečnosti při prostorovém zrcadlení mění znaménko (je to tzv. pseudoskalár). Je-li v nějakém experimentu generováno určité rozdělení hodnot veličiny S, pak z případné invariance vůči prostorovému zrcadlení vyplývá, že toto rozdělení musí být symetrické vzhledem k operaci $S \to -S$. Madam Wu prokázala porušení této relace při β rozpadu radioaktivního jádra kobaltu. Zatímco veličinu $\mathbf{A}$ v jejím experimentu představoval směr spinové orientace jader v ochlazeném kobaltovém vzorku, veličinou $\mathbf{V}$ byl pozorovaný směr emise elektronů – ve směru spinu jádra vyletovalo víc elektronů než proti směru spinu.

Narušení prostorové zrcadlové symetrie bylo v 50. letech 20. století značným překvapením. Fyzikové se však brzy utěšili domněnkou, že skutečnou zachovávající se paritou je parita CP, vznikající kombinací prostorové inverze a nábojového sdružení. Věřilo se, že vůči tomuto zobecněnému zrcadlení je příroda již invariantní. Ani tato domněnka však v experimentálnímu testu neobstála – a na vině jsou opět slabé interakce [10]. V roce 1964 měřili J.V. Cronin a V.L. Fitch rozpady podivných částic, známých jako neutrální mezony K^0 a $\overline{K}^0$ (jedná se o pár částice-antičástice). Výrazem "podivný" zde není míněna nějaká nepatřičnost těchto částic, ale spíše fakt, že veličina zvaná podivnost (zachovávající

[11] Při sledování rotujícího objektu v zrcadle se obrátí jak polohové vektory $\mathbf{x}_i$, tak hybnosti $\mathbf{p}_i$ všech částic, takže moment hybnosti $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$ zůstane týž.

se při silných interakcích) nabývá na těchto částicích nenulové hodnoty. Mezony K^0 a $\overline{K}^0$ se však v jistém smyslu skutečně podivně chovají, protože před rozpadem (který se děje v důsledku slabé interakce) se "přeskupí" do jistých specifických superpozic původních vlnových funkcí K^0 a $\overline{K}^0$. Vznikají tak vlastně nové částice, nazývané podle svých středních dob života τ při exponenciálním rozpadu jako mezony K_L (L jako *Long*: $\tau_L \approx 5 \cdot 10^{-8}$ s) a K_S (S jako *Short*: $\tau_S \approx 9 \cdot 10^{-11}$ s). Z analýzy produktů rozpadu obou mezonů K_L a K_S navíc vyšlo najevo, že tyto částice nemají ostrou hodnotu CP parity. Míra narušení kombinované parity je sice mnohem menší než míra narušení obyčejné parity P při β rozpadu,[12] nicméně efekt narušení CP symetrie je nezpochybnitelný.

Tomu, kdo by chtěl nad narušením CP symetrie projevit lítost, bych rád sdělil, že pravděpodobně jen díky tomuto drobnému efektu vznikla na počátku vývoje vesmíru jistá malá asymetrie mezi hmotou a antihmotou. Takže tomuto narušení vlastně vděčíme za to, že jsme naživu – a že se nad CP narušením můžeme dle libosti třeba i pohoršovat. Děkujeme!

Nakonec se zdá, že milovníci zrcadlové symetrie si přece jen přijdou na své. Podle současných představ by totiž měla být zachována alespoň symetrie vůči trojkombinaci inverzí CPT, přičemž svět se nachází ve stavu, pro nějž $CPT = 1$. To znamená, že provedeme-li zrcadlení prostoru, změnu částic na antičástice, a navíc ještě pustíme všechny zaznamenané interakce pozpátku, výsledek bude k nerozeznání podobný tomu, "co normálně žijeme". Mimochodem, tato útěšná představa má za následek ještě jedno narušení symetrie – symetrie vůči časové inverzi T. Symetrie T neimplikuje žádnou zachovávající se veličinu, ale elementární fyzikální zákony jsou vůči otočení chodu času vesměs invariantní. Z narušení CP a splnění CPT však vyplývá, že invariance vůči T musí být v určité malé míře (rovnající se míře narušení CP) porušena. Plné teoretické pochopení a experimentální ověření této skutečnosti je však úkolem budoucnosti.[13]

5 Proč existuje foton

Uvažujme kvantovou částici o hmotnosti m pohybující se v potenciálu $V(\mathbf{x})$. Hamiltonián má tvar

$$H = \frac{1}{2m}[\underbrace{-i\hbar\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{p}}]^2 + V(\mathbf{x}) \ , \quad \text{kde } \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{5}$$

($\mathbf{e}_\bullet$ jsou bázové vektory ve směru prostorových os x, y, z). Zkusme zjistit, zda časová Schrödingerova rovnice (2) s hamiltoniánem (5) není náhodou invariantní vůči transformaci vlnové funkce podle předpisu

$$\psi(\mathbf{x},t) \to e^{if(\mathbf{x},t)}\psi(\mathbf{x},t) \ , \tag{6}$$

[12] Míra narušení CP parity se dá vyjádřit velikostí relativní příměsi opačné parity ve vlnových funkcích K_L či K_S. Výsledek je $\epsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

[13] Makroskopický svět samozřejmě vykazuje flagrantní asymetrii vůči směru chodu času (viz film puštěný pozpátku), ale nezdá se pravděpodobné, že by malé narušení symetrie T na mikroskopické úrovni mohlo makroskopickou "šipku času" nějak vysvětlit.

kde $f(\mathbf{x}, t)$ je libovolná funkce souřadnic a času. Je snadné se přesvědčit, že *není*.[14] A proč by taky měla být?

Zkusíme to ale ještě jednou. Uvažujme kvantovou částici o hmotnosti m a náboji e pohybující se v elektromagnetickém poli, určeném vektorovým potenciálem $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ a skalárním potenciálem $\varphi(\mathbf{x})$. Hamiltonián má tvar

$$H = \frac{1}{2m}[-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - e\mathbf{A}(\mathbf{x})]^2 + e\varphi(\mathbf{x}) \ . \tag{7}$$

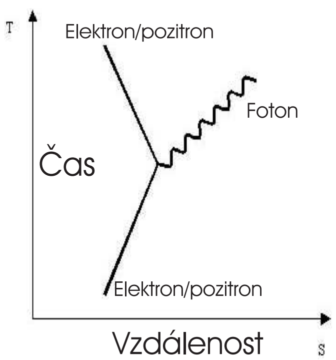
Není časová Schrödingerova rovnice (2) s tímto hamiltoniánem invariantní vůči transformaci (6)? Na první pohled se zdá, že ne, ale věc je tentokrát trochu složitější. Po chvíli snažení možná zjistíme, že hamiltonián (7) se transformuje do tvaru

$$H' = \frac{1}{2m}[-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - e\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \hbar\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}, t)]^2 + e\varphi(\mathbf{x}) + \hbar\tfrac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) \ , \tag{8}$$

takže se opravdu zdá, že není stejný jako hamiltonián před transformací. Rozdíl mezi H a H' spočívá v tom, že zatímco hamiltonián (7) odpovídá poli $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$, hamiltonián (8) obsahuje pole

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \tfrac{\hbar}{e}\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}, t) \ , \quad \varphi'(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \tfrac{\hbar}{e}\tfrac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) \ . \tag{9}$$

Ale moment, z klasické elektrodynamiky je přece známo, že transformace (9) nemění pozorovatelné účinky elektromagnetického pole [11]. Jedná se o tzv. *kalibrační transformaci*, při níž síly působící na všechny nabité částice zůstávají stejné.[15] Takže změněný tvar hamiltoniánu H' se dá snadno převést na původní tvar H kalibrační transformací elektromagnetického pole. V tomto smyslu hamiltonián (7) opravdu *je* invariantní vůči transformaci (6)!



Můžete si myslet, že právě odvozená symetrie Schrödingerovy rovnice částice v elektromagnetickém poli je jen jakousi náhodnou, víceméně "obskurní" symetrií, nemající hlubší fyzikální význam. Hermann Weyl, kterého již známe z úvodu, tento názor nesdílel. Byl přesvědčen, že tvar interakce částic s elektromagnetickým polem je *určen* požadavkem kalibrační symetrie. Tyto myšlenky byly posléze vtěleny do kvantové elektrodynamiky – teorie popisující interakci kvantových nabitých částic s kvantovaným elektromagnetickým polem [12]. Přímým důsledkem kalibrační symetrie je zde existence fotonu, tedy kvanta elektromagnetického pole, a způsob jeho interakce s nabitými částicemi (viz diagram znázorňující

[14]Prostorové derivace v kinetické části hamiltoniánu (5) a časová derivace v rovnici (2) působí i na exponenciální faktor na pravé straně transformace (6), čímž vznikají dodatečné členy hamiltoniánu.

[15]Intenzita elektrického pole $\mathbf{E}$ a magnetická indukce $\mathbf{B}$ se počítají z výrazů $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ a $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, takže po kalibrační transformaci platí $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ a $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

vertex elementární elektromagnetické interakce[16]). Můžeme to vyjádřit i tak, že foton musí existovat, neboť Někdo chtěl, aby příroda byla symetrická vůči kalibračním transformacím. Zachovávající se veličinou, odvozenou pro kalibrační invarianci z teorému Noetherové, je v tomto případě elektrický náboj.

Nezůstalo však jen u kvantové elektrodynamiky. Myšlenka kalibrační symetrie se stala natolik přitažlivou, že byla úspěšně použita také při konstrukci kvantové chromodynamiky – teorie popisující silné interakce kvarků (současných kandidátů na elementární částice jaderné hmoty) [12]. I když v tomto případě je matematika kalibračních transformací poněkud složitější,[17] výsledek je obdobný jako v elektrodynamice – objevení se částic zprostředkujících interakce mezi kvarky, totiž gluonů.[18]

Použití stejných principů u slabých interakcí narazilo na určité obtíže. Obecnou vlastností kalibračních transformací je to, že příslušné částice zprostředkující interakce (jako fotony nebo gluony) mají nulovou klidovou hmotnost. Částice přenášející slabé interakce – intermediální bosony W a Z – jsou ale hmotné, dokonce velmi těžké. Mechanismus, kterým se pomocí kalibračních symetrií takové částice dají vytvořit, byl však nakonec také odhalen [12]. Zahrnuje novou myšlenku, totiž tzv. *spontánní narušení symetrie*. To se na obecné úrovni dá vysvětlit zhruba tak, že i systém, jehož dynamika je invariantní vůči nějaké transformaci, se může samovolně dostat do stavu o nižší symetrii. Tak jako např. magnet, který si při ochlazování spontánně vybere jeden směr magnetizace, i když všechny interakce mezi elementárními dipóly jsou rotačně invariantní.[19] Ukázalo se, že spojením kalibrační symetrie s myšlenkou jejího spontánního narušení dostáváme kalibrační částice s nenulovou hmotností. Vedlejším produktem (či spíše výchozím předpokladem) je však existence ještě další částice, tzv. Higgsova bosonu. Je to právě matematická tortura uskutečněná na poli této částice,[20] která nakonec vede ke kýženému výsledku – vzniku hmotných intermediálních bosonů. Dá se proto říci, že Higgsův boson je jakýmsi "spasitelem" tzv. Standardního modelu mikrosvěta (v němž má myšlenka zobecněné kalibrační invariance stěžejní postavení) [12, 13]. Zároveň je však posledním z plejády částic tohoto modelu, která dosud čeká na experimentální potvrzení.

[16]Orientace diagramu v časoprostoru je libovolná, takže vertex může vyjadřovat různé fyzikální děje zahrnující emisi či absorbci fotonu nabitými částicemi. Ačkoliv se tyto děje nedají realizovat samostatně (jedna ze zúčastněných částic je vždy virtuální, tj. nemá správnou hodnotu klidové hmotnosti), všechny složitější elektromagnetické procesy se dají z elementárních vertexů poskládat.

[17]Zatímco grupa lokálních transformací (6) je v podstatě jednoduchá unitární grupa U(1), o které jsme se zmínili v úvodu, grupa kalibračních transformací v kvantové chromodynamice je neabelovská.

[18]Obdobou elektrického náboje je zde tzv. *barva* kvarků, odtud název *chromodynamika.*

[19]"Spontánní narušení symetrie" neznamená ztrátu invariance hamiltoniánu vůči dané třídě transformací. Např. v případě magnetu se rotační symetrie projevuje tím, že všechny možné směry magnetizace jsou naprosto rovnocenné, tj. mají stejnou energii atd. Z jedné konkrétní realizace základního stavu (daný směr magnetizace) se však tato symetrie nedá vyčíst.

[20]Procedura, zahrnující výše naznačené ingredience, nese tísnivý název "Higgsův mechanismus".

6 Symetrie budoucnosti

Symetrie, kterými jsme se dosud zabývali, se dají rozdělit do dvou kategorií: (i) Časopropstorové symetrie, vyplývající z invariance fyziky vůči translacím, rotacím, či relativistickým Lorentzovým transformacím. Grupa transformací sjednocující všechny tyto operace je Poincarého grupa. (ii) Vnitřní symetrie, které nemají časoprostorový charakter. Ty vyplývají zpravidla z kalibrační invariance dané teorie (chápané ve zobecněném smyslu), která – jak jsme naznačili – determinuje základní matematický charakter entit, s nimiž teorie pracuje. Grupa vnitřních symetrií určuje vzájemné transformace těchto entit při uvažovaných operacích vnitřní symetrie.

Touha po sjednocení popisu všech symetrií v přírodě vedla mnohé teoretiky k hledání grupy, která by v sobě obsahovala jak Poincarého grupu časoprostorových transformací, tak všechny fundamentální grupy vnitřních transformací, vyplývající z kalibračních symetrií jednotlivých typů interakcí. V roce 1962 však S. Coleman a J. Mandula ukázali, že taková grupa neexistuje, resp. existuje pouze v takové formě, která je z fyzikálního hlediska naprosto nezajímavá.[21] Jejich tvrzení je jedním z nejznámějších příkladů tzv. “*no-go*” teorému, tj. důkazu neuskutečnitelnosti nějaké zdánlivě plausibilní matematické představy.

Fyzikové zklamaní tímto omezením však brzy našli jinou možnost zobecnění konceptu symetrie. Je jí tzv. *supersymetrie*, neboli SUSY, kterou na konci 60. a počátku 70. let minulého století nezávisle na sobě navrhlo několik teoretiků [12]. Coleman a Mandula dokázali, že Poincarého a vnitřní grupy se nedají obě vnořit do větší netriviální sjednocující grupy. Dají se však vnořit do jisté zobecněné algebraické struktury, která se v matematice označuje jako gradovaná grupa, či zkráceně *supergrupa*.

Připomeňme, že definiční vlastností obyčejné Lieovy grupy je existence konečné množiny operátorů $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, tzv. generátorů, jejichž komutační relace se dají vyjádřit autonomně, tj. pomocí stejných operátorů:

$$[A_i, A_j] = \sum_k c_{ijk} A_k \tag{10}$$

(čísla c_{ijk} představují tzv. strukturní koeficienty). Říkáme, že generátory “uzavírají algebru”. Gradované algebry (superalgebry), které definují strukturu supergrup, jsou obecnější. Jejich prvky se dělí do dvou sektorů – sudého a lichého. Zatímco prvky sudého sektoru splňují relaci (10), lichý sektor (jeho prvky označíme B_i) se řídí vztahy

$$[B_i, A_j] = \sum_k c'_{ijk} B_k \ , \qquad \{B_i, B_j\} = \sum_k c''_{ijk} A_k \tag{11}$$

(čísla c'_{ijk}, c''_{ijk} jsou zobecněné strukturní konstanty), kde složená závorka znamená tzv. antikomutátor: $\{a, b\} = ab + ba$. Rovnice superalgebry lze tedy shrnout takto:

[21]Při udržení jistých rozumných vlastností teorie je jediným možným sjednocením časoprostorových a vnitřních symetrií tzv. tenzorový součin Poincarého grupy s příslušnou vnitřní grupou. Jiné, méně triviální grupy obsahující obě zmíněné podgrupy jsou vyloučeny.

$$[\text{sudý}, \text{sudý}]=\text{sudý}, \qquad [\text{lichý}, \text{sudý}]=\text{lichý}, \qquad \{\text{lichý}, \text{lichý}\}=\text{sudý}.$$

Komutační relace operátorů jsou charakteristickou vlastností bosonů – částic s celočíselným spinem, řídících se Bose-Einsteinovou statistikou. Platí např. relace $[b_i, b_j^\dagger]=\delta_{ij}$ a $[b_i, b_j]=[b_i^\dagger, b_j^\dagger]=0$, kde $b_i^\dagger$, resp. b_j představují operátory kreace, resp. anihilace bosonu ve stavech označených indexy i a j. Naopak, antikomutační relace charakterizují kreační a anihilační operátory fermionů – částic s poločíselným spinem, popsaných Fermi-Diracovou statistikou (tedy podřízené Pauliho vylučovacímu principu). Platí $\{f_i, f_j^\dagger\}=\delta_{ij}$ a $\{f_i, f_j\}=\{f_i^\dagger, f_j^\dagger\}=0$, kde $f_i^\dagger$ a f_j kreují resp. anihilují fermiony v daných stavech.[22] Superalgebry (a jimi generované supergrupy) jsou proto přirozeným prostředím, v němž se bosony a fermiony vzájemně setkávají. Dá se dokonce říci, že toto spojení se nedá uskutečnit na půdě obyčejných algeber (grup), se kterými fyzika až dosud pracovala. Je proto přirozené, že SUSY rozšíření standardního modelu částicové fyziky vede k odvážné předpovědi, že všechny elementární částice přírody se vyskytují v boson-fermionových párech. Kromě fotonu, který je bosonem, by mělo existovat též fermionové fotino, kromě bosonu W fermion Wino, kromě gluonu gluino… A naopak, elektron jakožto fermion by měl mít bosonového partnera, nazvývaného selektron, každý kvark by měl mít svůj skvark atd.

Žádná z těchto supersymetrických částic nebyla v současných experimentech dosud detegována, ale pátrání bude pokračovat na větších urychlovačích.[23] Zvykli jsme si na to, že je-li nějaká teorie elegantní a úsporná, pak zpravidla bývá také pravdivá. A supersymetrie se zdá tyto předpoklady beze zbytku splňovat. Ať již však bude konečná odpověď ohledně supersymetrických částic jakákoliv, superalgebry a supergrupy mezitím našly přirozené uplatnění v některých kvantových systémech skládajících se z velkého počtu interagujících částic. Například v atomových jádrech, v nichž vedle sebe existují jak fermionové, tak bosonové typy excitací [14].

Zatím nepřestáváme stoupat. A "matematické schodiště", klíč ke stvořenému, dál roste pod našima nohama. Osobně nevěřím, že někdy skončí.

***

Děkuji A. Linhartovi, J. Podolskému a P. Stránskému, kteří se podrobili předběžnému testování účinků tohoto textu a přispěli k němu řadou cenných připomínek.

Reference

[1] H. Weyl, *Symmetry* (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1952).

[2] J.P. Elliot, P.G. Dawber, *Symmetry in Physics* (Macmillan Press, London, 1979).

[3] O. Litzman, M. Sekanina, *Užití grup ve fyzice* (Academia, Praha, 1982).

[22] To mj. znamená, že $b_i^\dagger b_i^\dagger = 0$, což je matematické vyjádření Pauliho vylučovacího principu: nelze vykreovat dva fermiony ve stejném kvantovém stavu!

[23] Doufá se, že SUSY částice by mohly vyřešit problém tzv. "chybějící hmoty" ve vesmíru.

[4] A. Bohr, O. Ulfbeck, Reviews of Modern Physics **67** (1995), str. 1; *Primary manifestation of symmetry. Origin of quantal indeterminacy.*

[5] W. Greiner, B. Müller, *Quantum Mechanics. Symmetries* (Springer, Berlin, 1994).

[6] E. Noether, Nachr. d. König. Gesellsch. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse 1918, str. 235; anglický překlad *Invariant variation problems*, viz arXiv:physics/0503066.

[7] H.J. Lipkin, *Lie Groups for Pedestrians* (North-Holland, Amsterdam, 1965).

[8] A. Frank, P. Van Isacker, *Algebraic Methods in Molecular and Nuclear Structure Physics* (Wiley, New York, 1994).

[9] *Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras*, ed. A. Bohm, Y. Ne'eman, A.O. Barut, vol. I, II (World Scientific, Singapore, 1988).

[10] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (Harper & Row, New York, 1987).

[11] J. Kvasnica, *Teorie elektromagnetického pole* (Academia, Praha, 1985).

[12] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. I, II, III (Cambridge University Press, 1995, 1996, 2000).

[13] J. Hořejší, Československý časopis pro fyziku **52** (2002), str. 291, 178, **53** (2003), str. 51, 186; *Historie standardního modelu I – IV*; viz též Sborník z X. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky (Velké Meziříčí, 2002), str. 110.

[14] F. Iachello, La Rivista del Nuovo Cimento **19** (1996), č. 7; *Symmetry and supersymmetry in nuclear physics.*