

# Kvantový chaos

**Pavel Cejnar**

Ústav částicové a jaderné fyziky MFF UK, V Holešovičkách 2, 18000 Praha  
cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz

*Slovem chaos byl ve fyzice pojmenován obor [1], který se v rámci klasické mechaniky zabývá důsledky citlivé závislosti chování fyzikálních systémů na počátečních podmínkách, tedy tzv. efektem motýlích křídel. Jak ale popsat chaotické chování ve světě kvantových částic?*

*Ukazuje se, že kvantová mechanika citlivou závislost na počátečních podmínkách nepřipouští a navíc předpovídá podstatné potlačení chaosu i na makroskopické úrovni. Přesto se kvantové vlastnosti systémů, které jsou podle klasické mechaniky chaotické, zásadně liší od vlastností klasicky uspořádaných systémů. Studium těchto otázek se zabývá obor, označovaný jako kvantový chaos.*

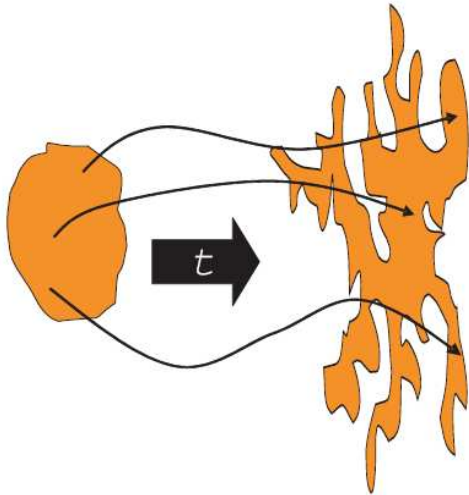
## Klasický chaos

Svět klasické mechaniky je deterministický – přesná znalost poloh a rychlostí všech částic ve vesmíru v jediném okamžiku by v principu dovolila určení celé (nekonečné) historie i budoucnosti. Praktická použitelnost tohoto ohromujícího závěru je však jen velmi omezená. I kdyby někdo disponoval výpočetní kapacitou nutnou k řešení tak monstrózního úkolu, potřebná vstupní data by byla nekonečná. Musela by totiž obsahovat okamžité polohy a hybnosti (nebo rychlosti) všech částic s přesností na nekonečně mnoho platných cifer.

Omezení přesnosti zadání počátečních podmínek vede ovšem k chybným předpovědím. Po dlouhou dobu se předpokládalo, že chyba extrapolovaných poloh a hybností bude zhruba stejného řádu jako počáteční nepřesnost. Tak tomu skutečně je u tzv. *integrabilních* systémů, které si klasická mechanika zamilovala ze všech nejvíc. Jsou to soustavy, jejichž dynamika se dá (v důsledku dostatečného počtu integrálů pohybu, tj. nezávislých zachovávaných se veličin) alespoň částečně vyjádřit analyticky – prostřednictvím již známých či dosud nepopsaných analytických funkcí, tedy, s jistou nadsázkou, vyřešit pomocí „tužky a papíru“. V nezměrném moři všech myslitelných mechanických systémů je však podíl těch integrabilních jen zcela zanedbatelný. Většinou (přesněji: skoro vždy) je integrálů pohybu jen málo (v krajním případě jen jeden – energie<sup>1</sup>), což nejen znemožňuje analytický popis, ale také porušuje předpoklad pomalého narůstání chyb. A tím je také na praktické úrovni anulována představa všeobecného determinismu [2] – při sebemenší počáteční nepřesnosti totiž narůstající neurčitost řešení dříve či později překročí přijatelné meze.

Jak je možné, že jednoduché pohybové rovnice mohou generovat prakticky nepředvídatelné chování? Jevišťem klasické fyziky je *fázový prostor*. V něm se fyzikální stav systému skládajícího se z  $N$  částic zobrazuje jako jediný bod v prostoru o dimenzi  $d=6N$  (fázový prostor zahrnuje 3 souřadnice polohy a 3 složky hybnosti každé částice). Časový vývoj systému je popsán jako trajektorie ve fázovém prostoru, přičemž z deterministického charakteru klasické fyziky vyplývá, že každým bodem fázového prostoru prochází právě jedna trajektorie – každé počáteční podmínce je přiřazena právě jedna budoucnost a minulost. Na trajektorie ve fázovém prostoru se můžeme dívat jako na proudové čáry toku jakési fiktivní „kapaliny“. Dá se ukázat, že pohybové rovnice klasické mechaniky odpovídají toku nestlačitelné kapaliny: vytkneme-li libovolný objem fázového prostoru kolem zvoleného počátečního bodu, jeho velikost se bude v průběhu evoluce zachovávat. Pro vývoj *tvaru* však již žádná omezení neexistují. A většina neintegrabilních systémů této „svobody“ opravdu

využívá – z jednoduchých počátečních forem se časem stávají roztodivné útvary, podobné např. „chobotnici“ na obrázku 1.



**Obrázek 1:** Vývoj fázového objemu pro chaotický systém. Velikost oblasti se zachovává, ale tvar svými tenkými výběžky postupně proniká celým fázovým prostorem.

Právě zde spočívají kořeny chaotického chování. Pokud objemová buňka fázového prostoru představuje počáteční podmínku zatíženou nepřesným zadáním poloh a rychlostí, pak útvary, do nichž se tato buňka postupně vyvíjí v závislosti na čase  $t$ , odpovídají neurčitým budoucím stavům. Výchozí objemový element fázového prostoru bývá jednoduchý útvar, v němž největší vzdálenost  $L_{\max}$  mezi dvěma body je řádově rovna charakteristickému rozměru  $L$ , danému výrazem  $\Omega \approx L^d$ , kde  $\Omega$  označuje velikost fázového objemu a  $d$  dimenzi fázového prostoru. Lalokovité útvary vzniklé evolucí z počáteční buňky však již tyto podmínky v obecném případě nesplňují: zpravidla pro ně platí  $\Omega \ll (L_{\max})^d$ , tedy  $L_{\max} \gg L$ . To ale znamená, že vzdálenost  $L_{\max}$  a s ní i chyba zadání stavu s časem roste. Na dostatečně dlouhé časové škále platí

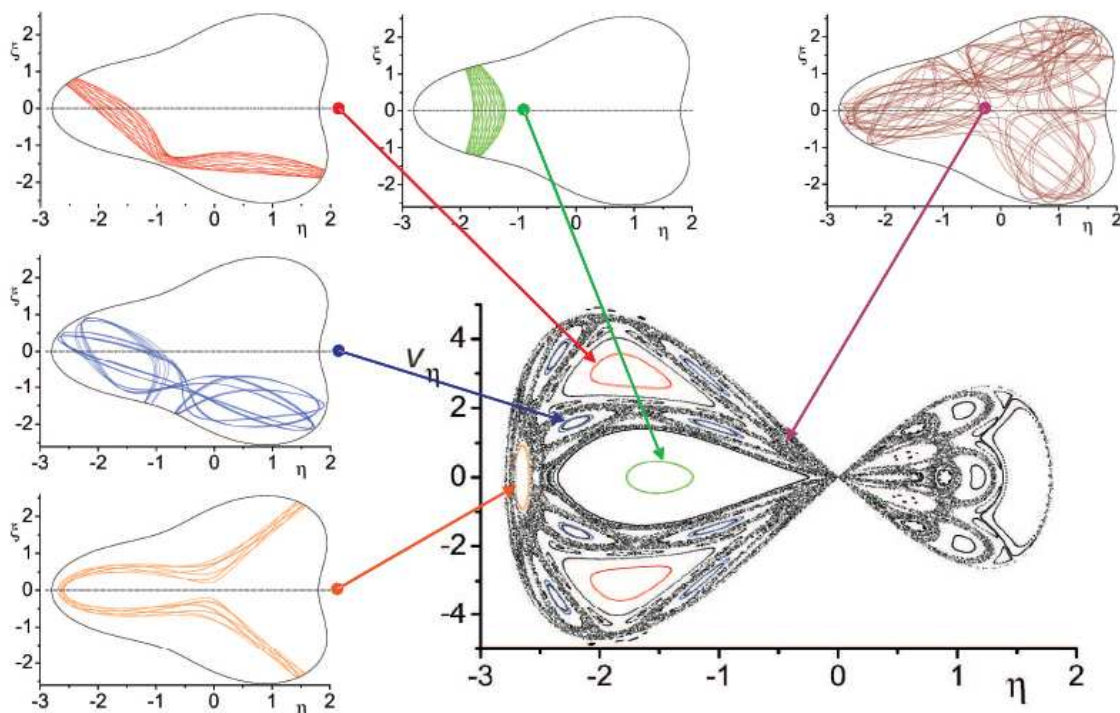
$$(1) \quad L_{\max}(t) \approx L_{\max}(0) \exp(\sigma_{\max} t) = L_{\max}(0) \exp(t/T_{\text{ch}})$$

kde číslo  $\sigma_{\max} > 0$  je tzv. Ljapunovův exponent ( $T_{\text{ch}} = 1/\sigma_{\max}$  představuje charakteristický čas expanze fázové buňky). Poslední rovnice je kvantitativním vyjádřením citlivé závislosti na počátečních podmínkách, tedy „efektu motýlích křídel“: mávnutí křídel motýla na Havaji může způsobit tornádo v Texasu.

Integrabilní systémy se vyznačují uspořádaným předivem trajektorií ve fázovém prostoru. Protneme-li fázový prostor dvourozměrným řezem, budou se body jednotlivých průchodů vybrané trajektorie tímto řezem ukládat na spojité křivky (to je důsledkem integrálů pohybu). Takto vzniklé útvary, mající často estetický rozměr, nazýváme Poincarého mapy.<sup>2</sup> Naopak, pro systémy s citlivou závislostí na počátečních podmínkách vyplňují trajektorie fázový prostor neuspořádaným způsobem – na Poincarého mapě se jednotlivé průchody objevují zdánlivě zcela náhodně a nevytvářejí žádné obrazce. Také proto se těmto systémům začalo říkat *chaotické*.

Nejzajímavější systémy klasické mechaniky jsou ty na pomezí mezi pořádkem a chaosem. Dlouho nebylo jasné, zda takové systémy vůbec existují – nevědělo se totiž, zda se při postupném narušování integrability chaos prosazuje náraz či jen pozvolna. Pravdivou se ukázala být druhá alternativa (to je obsahem tzv. KAM teorému, který v letech 1954 až 1963 zformulovali a postupně dokázali matematici Kolmogorov, Arnold a Moser). Příklad Poincarého mapy pro systém se smíšenou regulární a chaotickou dynamikou je na obrázku 2.

Vidíme, že oblasti s uspořádanými vzory bodů jsou odděleny vrstvami náhodných průchodů. Poznamenejme, že mechanismus, jakým se pravidelné obrazce na Poincarého mapách regulárních systémů při postupném zvětšování poruchy rozpouštějí v „mlze“ chaosu je skutečně fascinující potravu pro oči i mysl: nejdříve zanikají ty nejjednodušší periodické trajektorie a teprve postupně přicházejí na řadu ty složitější; ke slovu se dostává mj. i matematika fraktálů...



**Obrázek 2:** Poincarého mapa a několik trajektorií v potenciálu  $V = r^4 + r^3 \cos 3\varphi - 5.05r^2$ , kde  $r$  a  $\varphi$  představují polární souřadnice v rovině  $\eta \times \xi$ . Poincarého mapa (vpravo dole) zobrazuje souřadnici  $\eta$  a odpovídající rychlost  $v_\eta$  pro celkem 50 tisíc průchodů 52 trajektorií rovinou  $\xi = 0$ . Některé z trajektorií jsou přiřazeny odpovídajícím oblastem řezu pomocí šipek a barev. Zatímco uspořádané trajektorie vytvářejí na Poincarého mapě pravidelné křivky, průchody chaotických trajektorií (jako např. té vpravo nahoře) homogenně vyplňují nějakou dvourozměrnou oblast. Zobrazená dynamika může být chápána nejen jako pohyb částice ve zmíněném potenciálu, ale také jako zjednodušený model pro kolektivní vibrace atomových jader (souřadnice  $\eta$  a  $\xi$  charakterizují dynamiku elipsoidálně deformovaného tvaru jádra). Detailní informaci a další obrázky lze najít v článkách [3].

### Chaos a kvantová mechanika

Podle Heisenbergova principu neurčitosti není možná současná přesná znalost polohy a hybnosti. Kvantová mechanika proto nezná fázový prostor ani trajektorie částic. Stav kvantového systému je zadán vlnovou funkcí, jež je prvkem (bodem) abstraktního vektorového prostoru, tzv. Hilbertova prostoru (odtud pojem stavový vektor jako alternativní označení vlnové funkce). Jako stavový prostor kvantové mechaniky je Hilbertův prostor analogií fázového prostoru klasické mechaniky. Bylo by proto přirozené předpokládat, že kvantové rozšíření definice chaosu je možné zobecněním citlivé závislosti na počátečních podmínkách z fázového do Hilbertova prostoru. Jenže to právě nelze! Kvantová mechanika je totiž lineární, což znamená, že neumožňuje exponenciální narůstání chyb podle rovnice (1).

Evoluční rovnicí kvantové mechaniky je známá Schrödingerova rovnice, která je deterministická v tom smyslu, že přesné zadání vlnové funkce  $\Psi_0$  v jednom okamžiku, např.  $t=0$ , znamená možnost určení vlnové funkce  $\Psi_t$  v libovolném čase  $t \neq 0$ . Citlivost Schrödingerovy rovnice k počátečním podmínkám se dá testovat jejím řešením s porušenou počáteční vlnovou funkcí, totiž

$$(2) \quad \Psi'_0 = \Psi_0 + \delta\Psi_0,$$

kde  $\delta\Psi_0$  označuje nějakou malou odchylku od původní vlnové funkce  $\Psi_0$ . Slovem „malý“ zde míníme skutečnost, že velikost (norma) vektoru  $\delta\Psi_0$  je mnohem menší než velikost (norma)  $\Psi_0$ , tedy  $\|\delta\Psi_0\| \ll \|\Psi_0\|$ . Jak se odchylka mezi  $\Psi_0$  a  $\Psi'_0$  bude vyvíjet s narůstajícím časem?

Z linearity Schrödingerovy rovnice plyne, že pro počáteční podmínku (2) má řešení v čase  $t$  tvar součtu  $\Psi'_t = \Psi_t + \delta\Psi_t$ , kde  $\Psi_t$  představuje řešení s počáteční podmínkou  $\Psi_0$  a  $\delta\Psi_t$  řešení s počáteční podmínkou  $\delta\Psi_0$ . Schrödingerova rovnice zachovává normu stavového vektoru (vlnové funkce), takže můžeme psát  $\|\Psi_t\| = \|\Psi_0\|$  a  $\|\delta\Psi_t\| = \|\delta\Psi_0\|$ . Rovnice  $\|\delta\Psi_t\| \ll \|\Psi_t\|$  tedy zůstává v platnosti pro libovolný čas  $t$ . Jinými slovy: je-li počáteční porucha malá, pak malou zůstane již navždy! Citlivá závislost na počátečních podmínkách se v kvantové mechanice neuskutečňuje.

Kvantová mechanika je však vůči chaosu ještě více nepřátelská. Nejenže neumožňuje jeho standardní definici ve svém oboru působnosti, ale dokonce zpochybňuje jeho existenci i na úrovni klasické fyziky. Jedním z předpokladů vzniku klasického chaosu je totiž absence periodicity nebo kvaziperiodicity<sup>3</sup> v časových závislostech charakteristických proměnných studovaného systému. V řeči matematiky to znamená, že tyto závislosti se nedají charakterizovat konečnou či spočetnou množinou frekvencí, nýbrž že spektrum frekvencí má spojitý charakter. Jenže spektrum možných energií – a tedy charakteristických frekvencí – vázaných kvantových systémů je vždy diskrétní, tedy spočetné, bytostně nespojitě. Charakter časových závislostí v kvantové mechanice proto nikdy nemůže být zcela neuspořádaný.

Tyto argumenty jsou vlastně ekvivalentním vyjádřením výše diskutovaného tvrzení o absenci chaosu v Hilbertově prostoru. Jenže striktně vzato, klasická mechanika by měla být jen limitou kvantové mechaniky. Kvantová dynamika přechází v klasickou, je-li počet zúčastněných částic dostatečně velký. Spektra velkých kvantových systémů mají sice stále diskrétní charakter, ale počet charakteristických frekvencí a jejich hustota jsou tak velké, že jde o situaci z praktického hlediska téměř nerozlišitelnou od skutečného kontinua. Slovo „téměř“ v předchozí větě je však důležité. Odchytky od klasického chování se objevují při sledování systému na velmi dlouhých časových škálách. A právě o takové škály jde v klasickém chaosu. Nekonzistenci klasické definice chaosu z hlediska kvantové mechaniky si teprve na konci 70. let 20. století uvědomili Boris Čirikov, Giulio Casati a několik dalších teoretiků.

Můžeme si to ujasnit také následujícím způsobem: Viděli jsme, že klasický chaos je spojen s proměnou jednoduchých buněk fázového prostoru ve složité lalokovité útvary, jejichž tenká „chlapadla“ se rozpínají přes velké části fázového prostoru. Jenže v kvantové mechanice je tento proces limitován Heisenbergovým principem neurčitosti:  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$  (součin kvantových neurčitostí polohy a hybnosti je zdola omezen Planckovou konstantou). Tuto relaci můžeme chápat jako výraz pro nejmenší element fázového prostoru, který je z kvantového hlediska ještě rozlišitelný: jeho objem je řádově roven hodnotě  $\hbar^{d/2}$  (kde  $d$  značí dimenzi fázového prostoru). Jakékoliv jemnější struktury jsou nemilosrdně zhlazeny vystředováním přes elementární kvantové buňky. Tvar fázového objemu se proto při evoluci

chaotického systému nemůže stát neomezeně složitý. Na dlouhé časové škále se jeho „fraktálovitá“ expanze, a tedy i proliferace chaosu, musí zastavit.

Kvantová předpověď potlačení chaosu se ovšem netýká jen mikroskopických systémů, jak by se na první pohled mohlo zdát. Překvapivá je skutečnost, že i pro makroskopické objekty je časová škála potlačení chaosu relativně krátká. V této souvislosti diskutovaným příkladem [4] je nepravidelná rotace Hyperionu, malého měsíce planety Saturn, jehož „chaotická“ časová konstanta z rovnice (1) se dá odhadnout jako  $T_{ch} \approx 100$  dní (silně nestabilní pohyb Hyperionu je podmíněn jeho n esférickým tvarem a intenzívním gravitačním působením největšího Saturnova měsíce – Titanu). Moment hybnosti Hyperionu vyjádřený v kvantových jednotkách  $\hbar$  je řádu  $10^{58}$ , což je velikost zajisté zcela „klasická“. Jednoduchý výpočet přesto ukazuje, že očekávaná doba pro kvantové potlačení chaosu je jen zhruba  $T_q \approx 37$  let.

Není tedy chaos v klasické mechanice pouhou chimérou? Ukázalo se, že kvantovému potlačování chaosu účinně brání jiná vlastnost kvantového světa, tzv. *dekoherence*. Tímto pojmem označujeme skutečnost, že kvantové systémy, které nejsou dokonale odizolované od okolního prostředí, mají tendenci dostávat se do kvantových stavů provázaných s prostředím (to znamená: nelze říci, v jakých kvantových stavech jsou systém a prostředí, ale jen v jakém stavu je společný celek) a tím ztrácet svou kvantovou čistotu.<sup>4</sup> Pod vlivem prostředí dochází k vzájemnému rozfázování (tedy ztrátě koherence) jednotlivých částí kvantové superpozice vyjadřující stav a tím se chování systému ve většině případů přibližuje klasické statistické fyzice. Protože kvantové potlačení chaosu souvisí s koherencí (kvaziperiodicita časových závislostí zůstává v platnosti jen za předpokladu, že příspěvky od jednotlivých kvantových energií mají neporušené fáze), efekty dekoherence na něj mají destruktivní vliv. Chaotické chování je tak zachráněno.

Jaké „prostředí“ způsobuje dekoherenci u Hyperionu? Všechna tělesa Sluneční soustavy interagují přinejmenším (mimo jiné) s proudem fotonů, které nepřetržitě přicházejí ze Slunce. Ačkoliv energie každého takového fotonu je mizivě malá a silový účinek bombardování povrchu planet a měsíců jejich stálým tokem se prakticky nedá postřehnout, efekt ztráty kvantové koherence je téměř okamžitý. V případě Hyperionu vede odhad charakteristické časové konstanty pro dekoherenci k hodnotě  $T_d \approx 10^{-53}$  s [4]. Kvantové potlačení chaosu, jehož časová škála je nesrovnatelně delší, se tedy nebude moci prosadit. Jsme svědky „kvantového potlačení kvantového potlačení“ chaosu.

## **Kvantová chaologie**

Vzájemné vztahy klasické a kvantové mechaniky, jejichž několik aspektů bylo nastíněno v předchozích odstavcích, jsou samy o sobě jednou z nejzajímavějších a zároveň asi i nejkomplicovanějších oblastí fyziky. Každý ví, že klasická mechanika by měla být limitou mechaniky kvantové – ať už limitou nekonečného počtu částic, nebo limitou nekonečné hmotnosti, nebo limitou nekonečně malé Planckovy konstanty,  $\hbar \rightarrow 0$ . Jenže tato limita je singulární! Při jejím uskutečnění se často objevují kvalitativně nové – emergentní – vlastnosti. Michael Berry to přibližuje následujícím příměrem [5]: *Kousnout do jablka a najít červa je dost nepříjemné, ale najít jen půlku červa je ještě horší. Určitě smutnější by však byl nález pouhé třetiny červa. Čím menší část jsme našli, tím více jsme ho možná snědli. Extrapolujíc tyto úvahy dál, můžeme si myslet, že nenalezení žádného červa představuje vůbec tu nejhorší možnou zkušenost s jablkem. Tato přesná logika však selhává, protože zmíněná limita je singulární. Velmi malá část červa ( $f \ll 1$ ) se kvalitativně liší od vůbec žádného červa ( $f=0$ ). S kvantovou a klasickou mechanikou se to má podobně:  $\hbar \rightarrow 0$  není totéž jako  $\hbar=0$ .*

Kvaziklasická fyzika ( $\hbar \rightarrow 0$ ) předpovídá principiálně odlišné chování než fyzika klasická ( $\hbar = 0$ ). Poznamenejme, že kvaziklasická limita kvantové mechaniky kontrastuje se zcela hladkou a nesingulární klasickou limitou relativistické mechaniky ( $c \rightarrow \infty$ ).

Berry kvantový chaos pojímá právě jako studium korespondence mezi klasickým a kvantovým chováním pro systémy, které jsou na klasické úrovni chaotické – samozřejmě s ohledem k obdobné korespondenci pro klasicky uspořádané systémy. Takto definovaný chaos už není ani tak jevem, jako spíše disciplínou. Berry pro ni navrhl název kvantová chaologie [6]: *Neexistuje kvantový chaos ve smyslu exponenciální citlivosti k počátečním podmínkám, ale existuje několik neobyčejných kvantových jevů, které odrážejí přítomnost klasického chaosu. Studium těchto jevů je kvantová chaologie.* Ačkoliv se Berryho název příliš neujal, zmíněné pojetí vcelku výstižně charakterizuje obor „kvantového chaosu“ v jeho současné podobě. V následujícím uvádím několik příkladů, jak se klasický pořádek a chaos projevují na kvantové (kvaziklasické) úrovni. Čtenáře se zájmem o hlubší studium těchto a dalších témat kvantového chaosu odkazuji na obsažné monografie [7-11].

1) *Korelace v energetických spektrech:* Kvantová spektra vázaných energetických stavů jsou vždy diskrétní. Jednotlivé energetické hladiny  $E_i$  jsou jednoznačně určeny kvantovým operátorem celkové energie systému, hamiltoniánem  $\hat{H}$ , a to prostřednictvím známé rovnice  $\hat{H}\Psi_i = E_i\Psi_i$ , kde  $\Psi_i$  označuje  $i$ -tý vlastní vektor (tj. vlnovou funkci odpovídající dané hladině). Přesto se na spektrum hodnot  $E_i$  se můžeme dívat jako na statistickou posloupnost čísel a k její analýze použít metody matematické statistiky.<sup>5</sup> Výsledky jsou velmi zajímavé. Ukazuje se, že spektra systémů, které jsou na klasické úrovni chaotické, vykazují jistý specifický typ korelací, projevující se na malých i velkých energetických škálách. Naopak, spektra klasicky uspořádaných systémů jsou spíše nekorelovaná. Těmito vlastnostmi, které tvoří asi nejvíce teoreticky i experimentálně rozvinutý obor kvantového chaosu, se budeme podrobněji zabývat v následujících kapitolách.

2) *Morfologie vlnových funkcí:* Je-li systém dvourozměrný a splňuje-li symetrii vůči obrácení chodu času, vlnové funkce odpovídající energetickým stavům se dají zobrazit jako reálné funkce v rovině  $x \times y$ . Můžeme pak např. studovat tvary křivek zadaných podmínkou  $\Psi(x, y) = 0$ , tedy čar o nulové amplitudě vlny. V regulárních systémech tvoří tyto křivky pravidelnou síť. V chaotických systémech se klikatí sem a tam, podobně jako stopy opilců, nicméně vždy tak, aby se různé čáry vzájemně neprotínaly. Systémy, které nejsou invariantní vůči inverzi času, tj. obsahují např. vnější magnetické pole,<sup>6</sup> mají vlnové funkce komplexní. V těchto případech může vlnová funkce nabývat nulových hodnot jen v jednotlivých bodech roviny  $x \times y$ , kde je zároveň splněno  $\text{Re } \Psi(x, y) = 0 = \text{Im } \Psi(x, y)$ . Takové body se často dají identifikovat s tzv. kvantovými víry – místy, kolem nichž se ustavuje vířivé proudění částic. Studium prostorového rozdělení nulových bodů představuje velmi zajímavý směr zkoumání. Dvourozměrné systémy, především tzv. kvantové biliáry (soustavy, kde se částice pružně odrážejí od stěn), tvoří asi nejrozšířenější objekty kvantového chaosu. Jejich výzkum je dnes možný i na experimentální úrovni pomocí mikrovlnných rezonančních dutin (s využitím ekvivalence Schrödingerovy a elektromagnetické vlnové rovnice) nebo s pomocí nových kvantových technologií [11].

3) *Rozptylové systémy:* Jedna z nejúspěšnějších metod testování kvantové mechaniky je založena na rozptylu: částice ve známém výchozím stavu procházejí interakcí se zkoumaným kvantovým systémem a měří se pravděpodobnosti přechodů do různých koncových stavů. Nezajímá nás tedy, co se děje v průběhu interakce, ale jen jaký je její konečný výsledek.

Korelace mezi vstupním a výstupním stavem jsou popsány tzv. srážkovou maticí. Také v teorii kvantového chaosu hraje rozptyl důležitou roli. Jedním z klíčových výsledků je vznik univerzálních, na detailech dynamiky nezávislých fluktuací elementů srážkové matice. Důležitou praktickou aplikací těchto výzkumů je popis šumu v elektronických obvodech a laserech [11].

4) *Citlivost k poruchám:* Myšlenka exponenciálního vzdalování řešení podle rovnice (1) se nakonec dá uplatnit i v kvantové mechanice. Nejde však o citlivost k počátečním podmínkám, ale o citlivost k chybám (šumu) interakčních parametrů systému. Pohybová rovnice kvantové mechaniky se dá vyjádřit ve tvaru:  $\Psi_t = \hat{U}_\lambda(t) \Psi_0$ , kde  $\hat{U}_\lambda(t) = \exp(-i\hat{H}_\lambda t/\hbar)$  reprezentuje kvantový evoluční operátor, jenž je plně určen hamiltoniánem systému  $\hat{H}_\lambda$ . Evoluční operátor závisí na konstantách, které se objevují v Hamiltoniánu – na nábojích, hmotnostech, intenzitách vnějších polí atd.; soubor všech těchto hodnot jsme souhrnně označili písmenem  $\lambda$ . Změníme-li některou z konstant, evoluce systému bude jiná. Asher Peres si již v 80. letech uvědomil, že tento typ chyb se může šířit bez ohledu na linearitu Schrödingerovy rovnice, takže by mohl představovat kvantovou analogii exponenciální citlivosti k počátečním podmínkám v klasické mechanice. Opravdu bylo ukázáno, že pro klasicky chaotické systémy se stavové vektory  $\Psi_t = \hat{U}_\lambda(t) \Psi_0$  a  $\Psi'_t = \hat{U}_{\lambda+\delta\lambda}(t) \Psi_0$  (které se vyvíjejí ze stejného počátečního stavu  $\Psi_0$  působením evolučních operátorů s hodnotami konstant  $\lambda$  a  $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$ , kde  $\delta\lambda$  je malá porucha) velmi rychle odklánějí. Na dlouhé časové škále za určitých podmínek platí

$$(3) \quad |(\Psi_t, \Psi'_t)|^2 \approx \exp(-\sigma_{\max} t),$$

kde  $(\Psi_t, \Psi'_t)$  označuje skalární součin, kvantifikující míru překryvu obou vlnových funkcí, a  $\sigma_{\max}$  klasický Ljapunovův exponent z rovnice (1). Chaotický kvantový systém tedy vykazuje exponenciální citlivost k vnějším parametrům. Má-li  $\delta\lambda$  charakter náhodného šumu, platnost rovnice (3) není omezena výše diskutovanou kvaziperiodicitou kvantové evoluce. Tento směr výzkumu je dnes velmi aktuální v souvislosti s úvahami o konstrukci a využití kvantových počítačů (výše zavedený překryv vlnových funkcí bývá označován jako *kvantová fidelita*).

5) *Parciální dynamické symetrie:* Tento zatím asi nejméně rozvinutý, nicméně velmi důležitý, směr výzkumu se pokouší vzájemně prolínání uspořádané a chaotické dynamiky pochopit na základě vhodně zobecněného pojmu symetrie. Symetrie – invariance pohybových rovnic vůči nějaké grupě transformací – je patrně nejfundamentálnější koncept ve fyzice, z něhož mj. vyplývají všechny známé zákony zachování. Integrabilní systémy se všemi svými integrály pohybu zjevně vykazují „vyšší symetrii“ než systémy chaotické, které vždy mají méně integrálů pohybu než stupňů volnosti. Vysvětlení smíšené dynamiky na pomezí pořádku a chaosu vyžaduje rozšíření těchto principů tak, aby dokázaly postihnout i *neúplné* symetrie a z nich vyplývající *přibližné* integrály pohybu (přibližná kvantová čísla). Zajímavé výsledky lze najít v pracích A. Perese a A. Leviatana.

## Statistika kvantových spekter

Na obrázku 3 vidíme několik diskrétních sekvencí čísel zobrazených tak, jako by šlo o kvantová spektra. Jen tři z těchto sekvencí (C,D,F) skutečná fyzikální spektra – resp. jejich části – reprezentují, ostatní tři (A,B,E) jsou vygenerované jinak. Ať už je původ zobrazených posloupností jakýkoliv, není pochyb, že na ně můžeme aplikovat statistické metody analýzy: můžeme zkoumat střední hodnoty, disperse, korelace atd. Bližším prozkoumáním např. zjistíme, že všech šest „spekter“ má stejný počet hladin, 50, takže (vzhledem ke konstantní

šířce „energetického“ intervalu) je *střední* vzdálenost mezi sousedními hladinami ve všech případech přesně stejná – budeme ji definovat jako jednotkovou. Podstatné odchylky mezi jednotlivými spektry by však měl odhalit *tvar* statistického rozdělení vzdálenosti mezi sousedními hladinami. Zatímco pro posloupnosti na levé straně jsou těsná přiblížení sousedních hladin velmi častá (vidíme zde dvojice, dokonce i trojice hladin), posloupnosti na straně pravé taková přiblížení naopak vůbec nevykazují. Není pochyb, že statistický rozptyl vzdálenosti sousedních hladin klesá zleva doprava, čímž se spektra stávají uspořádanější.



**Obrázek 3:** Srovnání několika spekter a posloupností: A – poissonovská posloupnost náhodných čísel, B – sekvence prvočísel začínající hodnotou 7791097, C – neutronové rezonance v terčovém jádře Erbium 166, D – spektrum délek periodických orbit v tzv. Sinaiově biliáru (rovinný systém, v němž se částice odráží mezi vnitřní stěnou tvaru kruhu a vnější stěnou tvaru čtverce), E – nuly Riemannovy zeta funkce, F – spektrum jednorozměrného harmonického oscilátoru. Zobáčky vyznačují nerozlišitelné dvojice či trojice čar. Adaptováno z práce [13].

Toto pozorování je správné. Zatímco spektrum A bylo vygenerováno zcela náhodně – jedná se o poissonovskou posloupnost, kterou můžeme získat zcela nahodilým, tedy nijak nekorelovaným rozmístěním hladin do zadaného intervalu – spektrum F naopak představuje dokonale ekvidistantní posloupnost přirozených čísel. Možná proto trochu překvapí skutečnost, že klasicky chaotické systémy mají spektra podobná těm na pravější straně obrázku (C,D,E), zatímco klasicky uspořádané systémy si za svůj kvantový „čárový kód“ zpravidla (i když ne vždy) volí totálně dezorganizované spektrum typu A.

Počátky pozoruhodné teorie, která vlastnosti kvantových spekter kvantitativně popisuje, spadají do 50. let 20. století, kdy se mnozí fyzikové snažili porozumět vlastnostem tzv. neutronových rezonancí, tedy ostrých maxim v účinném průřezu pomalých neutronů při zachytu těžšími jádry. Sekvence takových rezonancí pro terčové jádro  $^{166}\text{Er}$  je na obr. 3C (každá čárka odpovídá výskytu maxima v účinném průřezu na odpovídajícím místě). Jednotlivé rezonance se objevují na energiích, které odpovídají kvazi-vázaným stavům neutronů v terčovém jádře, tedy vlastně kopírují vysoce excitované kvantové spektrum složeného jádra. Protože nikdo nedovedl (a dodnes nedovede) toto spektrum spočítat (není ani znám přesný hamiltonián), zvolil Eugene P. Wigner a několik dalších teoretiků jinou strategii. Chtěli spočítat jen jakési střední, zprůměrované vlastnosti spektra, získané z předpokladu, že hamiltonián jaderných interakcí je sice zcela neznámý, ale splňuje jisté fundamentální symetrie (Wigner byl jedním z průkopníků použití symetrií v kvantové fyzice). Tak byla vypracována teorie náhodných matic, popisující statistické vlastnosti spekter za předpokladu, že maticové elementy hamiltoniánu jsou gaussovská náhodná čísla (pěkný úvod a soubor původních článků lze najít v knize [12]). Na začátku 80. let vyslovil Oriol Bohigas s kolegy hypotézu, že teorie náhodných matic přesně postihuje vlastnosti chaotických spekter [13]. Dnes máme k dispozici značný počet teoretických i empirických dat, která Bohigasovu hypotézu vesměs potvrzují.

Pro statistické rozdělení vzdáleností  $s$  mezi sousedními energetickými hladinami odvodil Wigner jednoduchou formulku

$$(4) \quad W(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

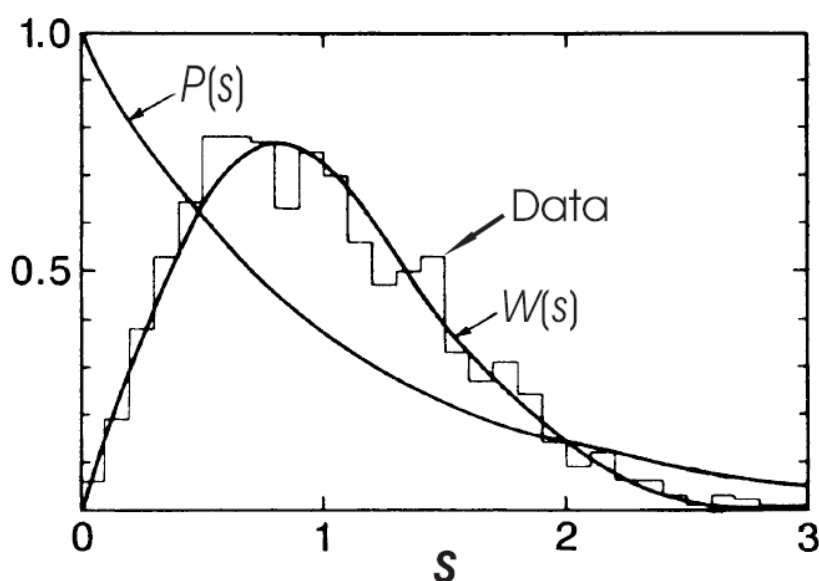
která velmi dobře popisuje jak empirická data týkající se neutronových rezonancí (obr.3C), tak (ve shodě s Bohigasovou domněnkou) spektra různých chaotických systémů. K mezím platnosti formule (4) se vztahují následující důležité poznámky: (a) Wignerův vztah byl získán jen pro náhodné matice dimenze 2, avšak numericky téměř nerozlišitelná rozdělení dostáváme (chtělo by se říci: zázrakem) i pro libovolně velké matice. (b) Uvedené rozdělení platí za předpokladu, že hamiltonián problému je invariantní vůči obrácení chodu času. V opačném případě se tvar rozdělení pro vzdálenost sousedních hladin změní, nicméně jeho kvalitativní rysy zůstávají stejné. (c) Při statistické analýze spekter pomocí rovnice (4) můžeme směřovat jen stavy se stejnými hodnotami zachovávajících se kvantových čísel, např. jen stavy o stejném spinu a paritě (u biliárů s reflexní symetrií je třeba vzájemně oddělit spektra sudých a lichých vlnových funkcí vzhledem k oběma souřadnicím). Při zahrnutí všech stavů by hamiltonián měl blokově-diagonální strukturu a tedy vykazoval odlišné spektrální charakteristiky, než jaké vyplývají z teorie náhodných matic. (d) Argument  $s = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$  v rovnici (4) je vzdálenost sousedních energetických hladin normovaného spektra, kde energie  $\varepsilon_i$  jsou získány z původních energií  $E_i$  speciální transformací, při níž se odstraní systematické změny hustoty hladin a střední vzdálenost hladin v celém spektru se nastaví na hodnotu  $\langle s \rangle = 1$ . Pro tuto delikátní a často poněkud riskantní operaci používáme výraz *unfolding*.<sup>7</sup>

Hlavním důsledkem Wignerovy formulky je skutečnost, že pro  $s \rightarrow 0$  dostáváme  $W(s) \rightarrow 0$ , což se dá vyjádřit tak, že ve spektrech chaotických systémů se sousední hladiny „odpuzují“. Stejný závěr platí i při narušení invariance vůči obrácení času, pokles rozdělení směrem k nule je pak dokonce ještě rychlejší (kvadratický).<sup>8</sup> Naopak, rozdělení vzdálenosti sousedních hladin v poissonovských spektrech se dá vyjádřit pomocí vztahu

$$(5) \quad P(s) = \exp(-s),$$

odkud plyne, že  $P(s) \rightarrow 1$  pro  $s \rightarrow 0$ . To je ve shodě s pozorováním, že poissonovská spektra nešetří dublety, dokonce ani triplety hladin, viz obr. 3.

V důsledku výše popsaných okolností geneze teorie náhodných matic byly prvními experimentálními objekty kvantového chaosu atomová jádra. Opravdu, o těchto hustých shlucích silně interagujících částic, na nichž si jaderní „modeláři“ již 70 let lámou zuby, by asi sotvakdo pochyboval, že jsou skutečně chaotické. Obrázek 4 ukazuje histogram normalizovaných vzdáleností sousedních neutronových a protonových rezonancí, který zohledňuje data z několika desítek různých jader.<sup>9</sup> Výsledek je ve velmi dobré shodě s křivkou odpovídající rovnici (4). Stavby stejných spinů a parit se v jádrech zřetelně odpuzují. Je třeba zdůraznit, že toto pravidlo neplatí pro *nízkoležící* rotační a vibrační hladiny – kolektivní jaderná dynamika je totiž za určitých okolností uspořádaná.



**Obrázek 4:** Rozdělení vzdáleností sousedních hladin ve spektrech vysoce excitovaných atomových jader. Spojité křivky ukazují wignerovský a poissonovský průběh rozdělení, tedy formule (4) a (5), zatímco histogram zachycuje rozdělení pozorované ve velkém souboru dat týkajících se neutronových a protonových rezonancí (zahrnuto celkem 1726 hodnot normované vzdálenosti  $s$  v mnoha různých jádrech). Adaptováno z práce [14].

### Suma přes periodické orbity

Proč se regulární spektra mají tendenci chovat poissonovsky, tedy jakoby náhodně? Důvodem je skutečnost, že integrabilní systémy zpravidla obsahují řadu podsystémů, které spolu vzájemně neinteragují a proto se chovají nezávisle. Energetické hladiny integrabilního systému „o sobě nic nevědí“, což je právě základní předpoklad pro odvození rozdělení (5). Je ale namístě poznamenat, že jakkoliv je poissonovské spektrum obvyklým projevem integrability, rozhodně není atributem nutným (viz např. obr. 3F, který zobrazuje spektrum harmonického oscilátoru – tedy „nejuspořádanějšího z uspořádaných“ systémů). Naopak, u chaotických systémů jsou všechny stupně volnosti vzájemně provázány, a proto se i jejich spektra chovají silně korelovaným způsobem. Zdá se, že tyto korelace (projevující se kromě rozdělení vzdáleností sousedních hladin i v mnoha dalších statistických mírách [13]) jsou zcela univerzální, tj. týkají se všech chaotických systémů bez rozdílu. Jediným podstatným rozlišením je, zda systém splňuje či nespĺňuje symetrii vůči otočení šipky času. Mnozí autoři

proto považují korelační vlastnosti vyplývající z teorie náhodných matic za *definici* kvantového chaosu (a to dokonce i tehdy, pokud nosičem těchto korelací není kvantový, případně ani fyzikální systém!).

V roce 1970 přišel Martin Gutzwiller s teorií, která vlastnosti spekter chaotických systémů vysvětlila na kvalitativně nové úrovni. Jeho práce navázala na Einsteinův článek z roku 1917, který se v jistém smyslu jako první v historii dotknul tématu kvantového chaosu. Einstein si všiml, že metody kvantování, rozvíjené v té době Bohrem, Sommerfeldem a dalšími pionýry rodící se kvantové mechaniky, se dají aplikovat jen na integrabilní systémy, a položil přirozenou otázku, jak tyto metody zobecnit na systémy, které integrabilní nejsou. Jenže „stará kvantová teorie“, jejíž součástí byly i zmíněné metody kvantování, byla zanedlouho opuštěna a Einsteinův článek zůstal po dlouhou dobu zůstal zcela bez povšimnutí.

Gutzwiller ukázal, že úplná informace o energetickém spektru daného kvantového systému je obsažena v souboru všech periodických trajektorií tohoto systému v klasickém fázovém prostoru. Odvodil formuli, která kvantovou hustotu hladin (tedy počet hladin připadající na jednotkový energetický interval) vyjadřuje prostřednictvím sumy přes jisté fyzikální charakteristiky periodických trajektorií. Další doklad toho, že tajemná pohoří na pomezí kvantové a klasické mechaniky nejsou dosud plně zmapována! Překvapivá skutečnost, že periodické trajektorie mohou hrát tak zásadní roli i pro chaotické systémy, kde je na klasické úrovni z důvodu nestability prakticky nelze pozorovat, byla vlastně opožděnou odpovědí na Einsteinovu otázku z roku 1917. Důvodem je „zhlazení“ fázového prostoru v důsledku kvantového principu neurčitosti, díky němuž jakoby se nestabilita periodických orbit v kvantovém případě redukovala.

Gutzwillerova formule (která je sama pouze aproximací složitějšího výrazu<sup>10</sup>) má následující obecný tvar [8]:

$$(6) \quad \rho_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_k \frac{T_k(E)}{M_k(E)} \cos\left[\frac{1}{\hbar} S_k(E) + \phi_k\right].$$

Zde  $\rho_{\text{osc}}(E)$  představuje oscilující část hustoty hladin pro energii  $E$  (zbylá, tzv. hladká část hustoty hladin, související s objemem při dané energii dostupného fázového prostoru v jednotkách  $\hbar^{d/2}$ , je odstraněna při *unfoldingu*) a suma na pravé straně běží přes všechny periodické orbity  $k$  (včetně vícenásobných opakování).  $T_k(E)$  představuje periodu,  $M_k(E)$  jistou veličinu charakterizující stabilitu dané trajektorie (čím větší stabilita, tím menší hodnota  $M_k$ , tedy tím větší váha daného členu v celkové sumě). Veličina  $S_k(E) = \oint p dq$  označuje klasickou akci pro trajektorii uzavřenou  $k$  (konstantní fáze  $\phi_k$  je nyní nepodstatná). M. Berry a M. Tabor ukázali, že ve tvaru (6) se dá vyjádřit oscilující část hustoty stavů i pro integrabilní systémy, s tím rozdílem, že jmenovatel  $M_k(E)$  má nyní poněkud jiný význam než míru stability.

Energetická závislost akce  $S_k(E)$ , vyjádřená v jednotkách Planckovy konstanty, generuje oscilace dané kosinovou závislostí v rovnici (6). Např. pro systémy, kde jediným způsobem interakce jsou pružně odrazy částice od pevných stěn (tedy např. pro dvourozměrné biliáry) je tvar akce velmi jednoduchý, a sice  $S_k = \sqrt{2mE}L_k$ , kde  $L_k$  je geometrická délka dané periodické trajektorie. Každá trajektorie tedy do spektrální hustoty hladin vnese oscilující člen s proměnnou „délkou“ vlny

$$(7) \quad \Lambda_k(E) = \frac{\pi\hbar}{L_k} \sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{\pi\hbar}{T_k(E)}.$$

Oscilace od jednotlivých orbit se ve formuli (6) sčítají a výsledná spektra tvoří koherentní superpozice všech příspěvků. Tyto kvantové „rázové vlny“ mají ohromné důsledky! Zodpovídají např. za zhuštění a zředění hladin, která dobře známe ze spekter atomů, jader i jiných mnoho-částicových systémů, např. kvantových teček (tzv. slupkové efekty). Mimo jiné tedy i za vznik periodické struktury chemických prvků.<sup>11</sup>

Rozborem formule (6) můžeme alespoň kvalitativně porozumět i tomu, proč je Wignerovo rozdělení natolik univerzální charakteristikou kvantově chaotických systémů. Víme, že veličina  $s = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$  se odvozuje z transformovaných spekter, v nichž střední hodnota vzdálenosti sousedních hladin je rovna jedné. Tuto transformaci můžeme představit jako pohled skrz jakousi „kvantovou lupu“, která ty nejmenší detaily spektra zvětší na úroveň makroskopické škály. Tím ovšem svůj pohled zaostřujeme na spektrální struktury, které podle výsledků předchozího odstavce souvisejí s těmi nejdelšími periodickými trajektoriemi. Ukazuje se, že velmi dlouhé uzavřené orbity se ve všech chaotických systémech (patřících do stejné třídy ekvivalence vzhledem k inverzi času) chovají velmi podobně. Množství orbit s periodou v intervalu  $(T, T+\Delta T)$  roste zhruba exponenciálně s  $T$  a stejným způsobem naopak klesá amplituda jednotlivých členů v rovnici (6). Důsledkem průměrování přes obrovské množství trajektorií je skutečnost, že na škále dané střední vzdáleností hladin je spektrální statistika závislá jen na typu dynamiky a ne na jejích konkrétních detailech.

Gutzwillerova formule byla s úspěchem využita při analýze různých experimentálních dat. Pěkný příklad se týká absorpce světla vysoce excitovanými vodíkovými atomy v silném magnetickém poli. Vodík – vázaná soustava protonu a elektronu – je sám o sobě zcela uspořádaný objekt, ale přítomnost intenzivního magnetického pole jej mění naopak v silně chaotický systém. Je-li stupeň excitace atomů vysoký, chování slabě vázaných elektronů se blíží kvaziklasické limitě. Jestliže v této situaci atomy ozařujeme viditelným světlem, snadno dosáhneme ionizace. Závislost intenzity absorpce světla na energii excitace vypadá na první pohled jako stochastická funkce, ale její Fourierova analýza odhaluje (při vhodné volbě proměnných) jen několik hlavních maxim, jejichž polohy splývají s periodami relevantních klasických trajektorií. Tyto trajektorie tedy zodpovídají za hlavní oscilační módy hustoty elektronových stavů na sledované energetické škále a tím i za fluktuace energetické závislosti absorpce světla. Detaily a odkazy na originální literaturu lze nalézt např. v knize [11].

## Chaos a Riemannova hypotéza

Zdá se, že kvantový chaos souvisí i s jedním z největších mystérií současné matematiky – tzv. Riemannovou hypotézou. V polovině 19. století studoval Bernhard Riemann hustotu  $\rho(x)$  rozdělení prvočísel<sup>12</sup> na číselné ose  $x$ . Pro hustotu prvočísel existuje jednoduchá přibližná formulka,  $\rho(x) \approx 1/\ln(x)$ , jejíž nepřesnost souvisí s vlastnostmi funkce, kterou zavedl asi o sto let dříve jiný matematický génius, Leonard Euler. Riemann pro tuto funkci použil řecké písmeno zeta. Její tvar se dá zapsat následujícím způsobem:

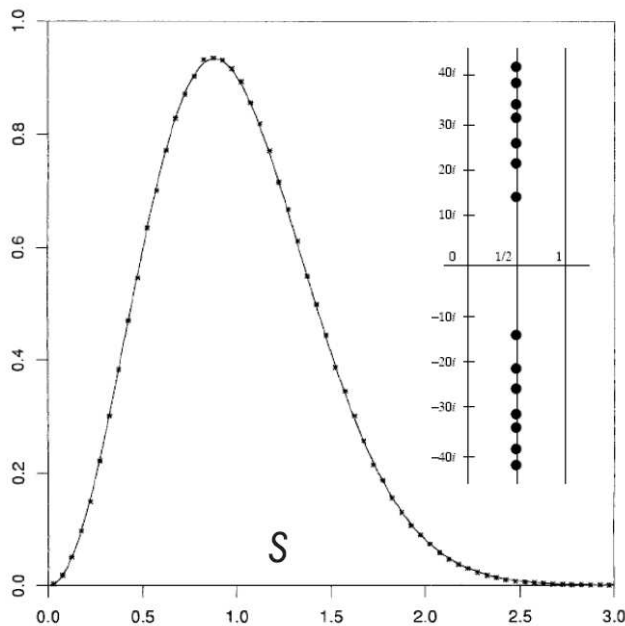
$$(8) \quad \zeta(z) = \frac{1}{(1-2^{-z})(1-3^{-z})(1-5^{-z})(1-7^{-z})\dots},$$

kde součin probíhá přes všechna existující prvočísla a  $z$  je komplexní proměnná ( $z \neq 1$ ). Z hlediska formule pro hustotu prvočísel je důležité určit body v komplexní rovině  $z$ , kde funkce (8) nabývá nulové hodnoty. Jedna skupina nulových bodů existuje na reálné ose,  $z = -2, -4, -6, \dots$ , ale mnohem důležitější skupina se vyskytuje v pásu kolmém k reálné ose mezi body 0 a 1. Riemann zjistil, že mimo tyto oblasti se žádné další nuly již vyskytovat nemohou. Protože však numerické hodnoty tehdy známých nulových bodů druhé skupiny měly reálnou část rovnu vždy  $1/2$ , tedy ležely přesně uprostřed dovoleného intervalu  $(0, 1)$ , Riemann vyslovil

hypotézu, že *všechny* nulové body druhé skupiny jsou lokalizovány na přímce  $z=1/2+i\cdot t$ , kde  $t$  označuje proměnnou imaginární část.

Tuto domněnku se však nikdy nepodařilo dokázat. Postupem času se stalo zřejmým, že platnost či neplatnost Riemannovy hypotézy má určující vliv na mnoho odvětví fundamentální matematiky [15], ale ani v současné době není na obzoru cesta, která by nás v dohledné době mohla dovést k jejímu důkazu, či naopak k vyvrácení. Neumějí-li si již tak dlouho ani ty nejlepší matematické mozky s problémem poradit, chtělo by se věřit, že hypotéza je spíše chybná. Jenže po nástupu počítačové éry bylo velké množství nul určeno numericky – v současné době jde již o počty nulových bodů v závratném řádu  $10^{20}$ . A zatím všechny tyto hodnoty splňují Riemannovu hypotézu. Je to úžasné a zároveň dost frustrující!

Jakou má zeta funkce souvislost s kvantovým chaosem? Bylo zjištěno, že rozdělení nulových bodů podél přímky  $z=1/2+i\cdot t$  (viz obr. 3E) se na jako vejce vejci podobá chaotickému energetickému spektru kvantového systému bez symetrie vůči časové inverzi. Odpovídající rozdělení vzdáleností sousedních nul je na obrázku 5 – stupeň shody s křivkou odvozenou z teorie náhodných matic je ohromující. Zdá se, že pro pochopení korelací nulových bodů zeta funkce hrají prvočísla podobnou roli jako periodické orbity pro chápání korelací v chaotických spektrech. V obou případech se jedná o skrytý řád, který na první pohled není viditelný.



**Obrázek 5:** Některé první nuly Riemannovy zeta funkce a histogram rozdělení vzdáleností sousedních nul, zahrnující cca milion nulových bodů v okolí bodu s pořadovým číslem  $2\cdot 10^{20}$ . Spojitá křivka odpovídá spektrální statistice chaotického systému bez invariance vůči časové inverzi. Adaptováno z práce [15].

Vzniká přirozená otázka: existuje chaotický systém, jehož spektrum je určeno podmínkou  $\zeta(z)=0$ ? Zřejmou odpovědí je *ano*, i když se to může zdát poněkud paradoxní, neboť od systému zadaného analytickým předpisem bychom právem očekávali integrabilitu. Nikdo dnes nedokáže hamiltonián takového systému vyjádřit explicitně, ale mnoho teoretiků v jeho odhalení spatřuje jakýsi „svatý grál“ kvantového chaosu. Takový systém by se pravděpodobně stal univerzálním modelem chaosu, stejně jako je harmonický oscilátor základním archetypem integrabilní dynamiky.

## Několik poznámek na závěr

Řecký filosof Empedoklés (\* 490 př.n.l.) slovem *Chaos* označoval svět totální neuspořádanosti a disharmonie. Jeho opakem, světem perfektního pořádku, byl *Sphairos*. Viděli jsme, že ve fyzice se hranice mezi oběma světy poněkud stírá: I za tím nejméně pravidelným chováním lze najít skrytý řád. A naopak, i to nejspřádanější chování nese stopy náhodnosti. Pod jistým úhlem pohledu se i chaotické systémy jeví jako uspořádané, jen na jiné – možná hlubší – úrovni.

Kvantový chaos se pokouší mapovat území na pomezí klasické a kvantové fyziky. Ukazuje se, že tato *Terra incognita* je jednou z nejzajímavějších, snad se dá říci i „nejdobrodružnějších“ oblastí fyzikálního bádání. Dochází zde ke spojení rozličných fyzikálních pohledů, k mísení nejrůznějších matematických přístupů. Ve věku nastupujících kvantových technologií může teorie kvantového chaosu přinášet velmi důležité praktické výsledky, zároveň si však uchovává potenciál otevírat fundamentálně nové teoretické pohledy. V jistém smyslu je výzkum v této oblasti plodnější alternativou poněkud jalových diskusí o interpretaci kvantové teorie. Matematika kvantového chaosu – teorie náhodných matic – se velmi dobře hodí i k popisu různých „nekvantových“, či dokonce zcela „nefyzikálních“ fenoménů. Řídí se jí esoterické, našemu chápání se dosud vymykající rozdělení nul Riemannovy zeta funkce, a naopak i cosi tak světského jako cenové fluktuace na burzovním trhu.

Studium kvantového chaosu však může mít důsledky také v hlubším kontextu filosofie vědy. Například singulární vlastnosti klasické limity kvantové mechaniky obohacují diskusi o redukcionismu – předpokladu, že veškerá složitost světa se dá převést do jen několika fundamentálních zákonů. Je-li tento předpoklad pravdivý (a fyzikové dnes vesměs věří, že ano), pak sjednocování jednotlivých vědních disciplín nebude ani zdaleka jednoduché. Jestliže totiž emergentní jevy vznikají i na rozhraní dvou tak příbuzných oborů jako klasická a kvantová mechanika, co pak očekávat na cestě mezi obory mnohem vzdálenějšími?

## Literatura:

- [1] J. Gleick, *Chaos - vznik nové vědy* (Ando Publishing, Praha, 1996).
- [2] J. Ford: *How random is a coin toss?*, *Physics Today*, April 1983, str. 40.
- [3] P. Cejnar, P. Stránský: *Regular and chaotic vibrations of deformed nuclei with increasing gamma rigidity*, *Physical Review Letters* **93** (2004) 102502; P. Stránský, M. Kurian, P. Cejnar: *Classical chaos in the geometric collective model*, *Physical Review C* **74** (2006) 014306.
- [4] M. Berry: *Chaos and the semiclassical limit of quantum mechanics (is the moon there when somebody looks?)*, ve sborníku *Quantum Mechanics: Scientific Perspectives on Divine Action*, ed. R.J. Russell *et al.* (Vatican Observatory CTNS publications, 2001), str. 41.
- [5] M. Berry: *Singular limits*, *Physics Today*, May 2002, str. 10.
- [6] M. Berry: *Quantum chaology*, *Proceedings of Royal Society A* **413** (1987), str. 183; *Quantum chaology, not quantum chaos*, *Physica Scripta* **40** (1989), str. 335.
- [7] Sborníky fyzikálních škol v Les Houches: Session XXXVI, 1981: *Chaotic Behaviour of Deterministic Systems*, ed. G. Iooss *et al.* (North-Holland, Amsterdam, 1983); Session LII, 1989: *Chaos and Quantum Physics*, ed. M.-J. Giannoni *et al.* (Elsevier, Amsterdam, 1991); Session LXIII, 1995: *Quantum Fluctuations*, ed. S. Reynauld *et al.* (Elsevier, Amsterdam, 1997).
- [8] M.C. Gutzwiller: *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).
- [9] L.E. Reichl: *The Transition to Chaos* (Springer, New York, 1992).
- [10] F. Haake: *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, Berlin, 1992).
- [11] H.-J. Stöckmann: *Quantum Chaos. An Introduction* (Cambridge University Press, 1999).
- [12] C.E. Porter: *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations* (Academic Press, New York, 1965).

[13] O. Bohigas, M.J. Giannoni: *Chaotic motion and random matrix theories*, ve sborníku *Mathematical and Computational Methods in Nuclear Physics*, ed. J.M. Gomez et al., Lecture Notes in Physics, vol. 209 (1984), str. 1.

[14] O. Bohigas, R.U. Haq, A. Pandey: ve sborníku *Nuclear Data for Science and Technology*, ed. K.H. Bockhoff (Reidel, Dordrecht, 1983), str. 809.

[15] B. Cipra: *A prime case of chaos*, ve sborníku *What's Happening in the Mathematical Sciences*, vol. 4 (American Mathematical Society, 1999), str. 3.

## Vysvětlivky:

<sup>1</sup> V tomto článku se zabýváme především fyzikou uzavřených, nedisipativních systémů, jejichž energie se vždy zachovává.

<sup>2</sup> Francouzský fyzik a matematik Henri Poincaré (1854-1912) byl jedním z prvních průkopníků teorie chaosu. Dávno před skutečným zrozením oboru si uvědomil, že klasická mechanika ukrývá mnohem širší škálu chování, než vyplývalo ze studia integrabilních systémů.

<sup>3</sup> Periodická funkce proměnné  $t$  se dá vyjádřit ve tvaru  $f(e^{i\omega t})$ , kde  $\omega$  je úhlová frekvence související s periodou  $T$  vztahem  $T=2\pi/\omega$ . Podobně kvaziperiodická funkce je definována vyjádřením  $f(e^{i\omega_1 t}, e^{i\omega_2 t}, \dots, e^{i\omega_n t})$ , kde  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ( $n>1$ ) reprezentují charakteristické frekvence, které nejsou v poměru celých čísel.

<sup>4</sup> Míjíme „čistotu“ ve smyslu dělení kvantových stavů na čisté a smíšené. Smíšené stavy, narozdíl od čistých, se nedají reprezentovat jednotlivými vektory  $\Psi$ , ale nějakým pravděpodobnostním rozdělením ve stavovém (Hilbertově) prostoru. V podobném smyslu pracuje i klasická statistická fyzika s hustotou pravděpodobnosti ve fázovém prostoru.

<sup>5</sup> Statistické postupy lze samozřejmě použít k analýze libovolných číselných posloupností, bez ohledu na to, zda jsou stochastické či deterministické. Např. analýza desetinného (či binárního) rozvoje čísla  $\pi$  vede k překvapivému závěru, že jednotlivá čísla rozvoje jsou nekorelovaná a prakticky se nedají odlišit od stochastického šumu. Matematický algoritmus generující rozvoj čísla  $\pi$  je přesto velmi jednoduchý.

<sup>6</sup> Vnější, externě zadané magnetické pole narušuje invarianci vůči časové inverzi proto, že při obrácení vektoru hybnosti,  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  (to je zjevný příznak obrácení chodu času), se obrátí také směr Lorenzovy síly, kterou pole působí na každou nabitou částici. Fyzikálně by k obrácení hybností došlo i pro částice uvnitř magnetu, čímž by se otočil také směr magnetického pole a invariance vůči časové inverzi by byla zachráněna. V externím poli však tento argument neplatí.

<sup>7</sup> Transformaci spektra je třeba provést tak, aby se odstranila případná *globální* energetická závislost hustoty hladin, ale ne její *lokální* fluktuace. Při nesprávném provedení *unfoldingu* by výsledné spektrum mohlo vypadat pokaždé jako na obr.3F.

<sup>8</sup> Energetické hladiny chaotických systémů se podle teorie náhodných matic chovají stejně jako nabitě částice dvourozměrného plynu o určité teplotě, které jsou vnějšími silami uvězněny na přímce (jedná se o ekvivalenci obou teorií ve smyslu identity rovnic!). Nepřiblížování se hladin je tedy v tomto smyslu opravdu důsledkem *coulombické repulze*. Při invarianci vůči časové inverzi je odpovídající teplota plynu dvakrát vyšší než bez ní, takže odpuzování na malých hodnotách  $s$  je o něco více překryto tepelným šumem.

<sup>9</sup> Největším problémem při experimentálních analýzách tohoto typu bývá úplnost spekter a znalost všech zachovávajících se kvantových čísel pro každý stav. V případě jaderného datového souboru byly úzkostlivě vybrány jen úplné sekvence spekter s dobře známými spiny a paritami.

<sup>10</sup> Řada tvaru (6) je zpravidla divergentní a její praktické použití vyžaduje jisté netriviální matematické triky.

<sup>11</sup> Bylo např. ukázáno, že magická čísla jader (počty nukleonů odpovídající nejsilněji vázaným nuklidům) se dají vysvětlit oscilacemi hustoty hladin danými několika nejjednoduššími uzavřenými orbity nukleonů uvnitř koule. Periodické orbity mají vliv také na vlnové funkce, kde se často objevují jako tzv. „jizvy“ – zvýšené pravděpodobnosti lokalizace částice podél křivek odpovídajících vybraným trajektoriím.

<sup>12</sup> Statistika prvočísel je vcelku dobře popsána Poissonovým rozdělením – viz obr. 3B.