

# Symetrie, dynamické symetrie, supersymetrie...

v mikrosvětě

---

Pavel Cejnar

cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz

Ústav částicové a jaderné fyziky MFF UK, Praha



Nahoru, dolů, dokola – toť dráhy prvků.

*Marcus Aurelius, 121-180 A.D.*

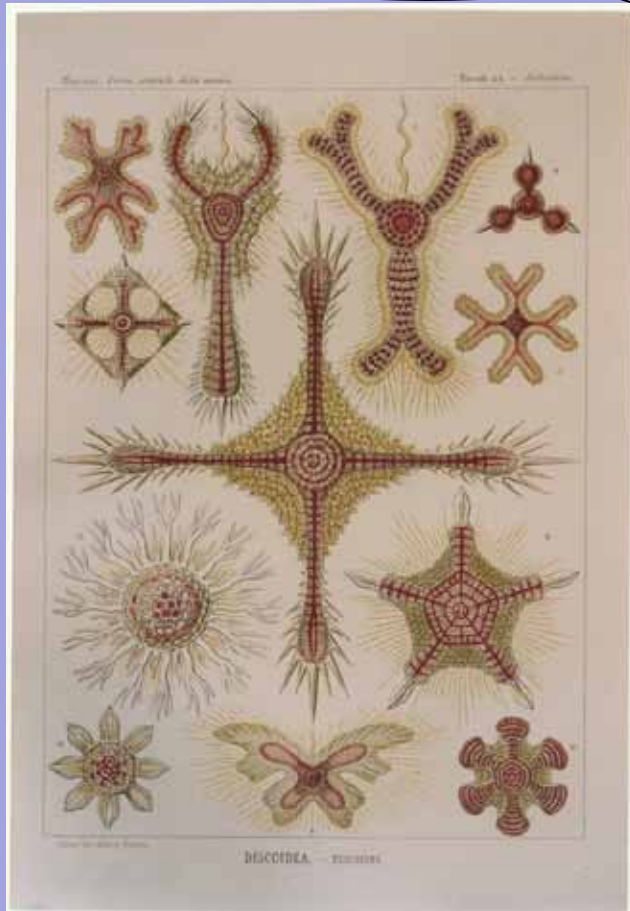
# Příroda vytváří symetrie → Symetrie tvoří přírodu

## 1) Nejdůležitější fyzikální veličiny vyplývají ze symetrií

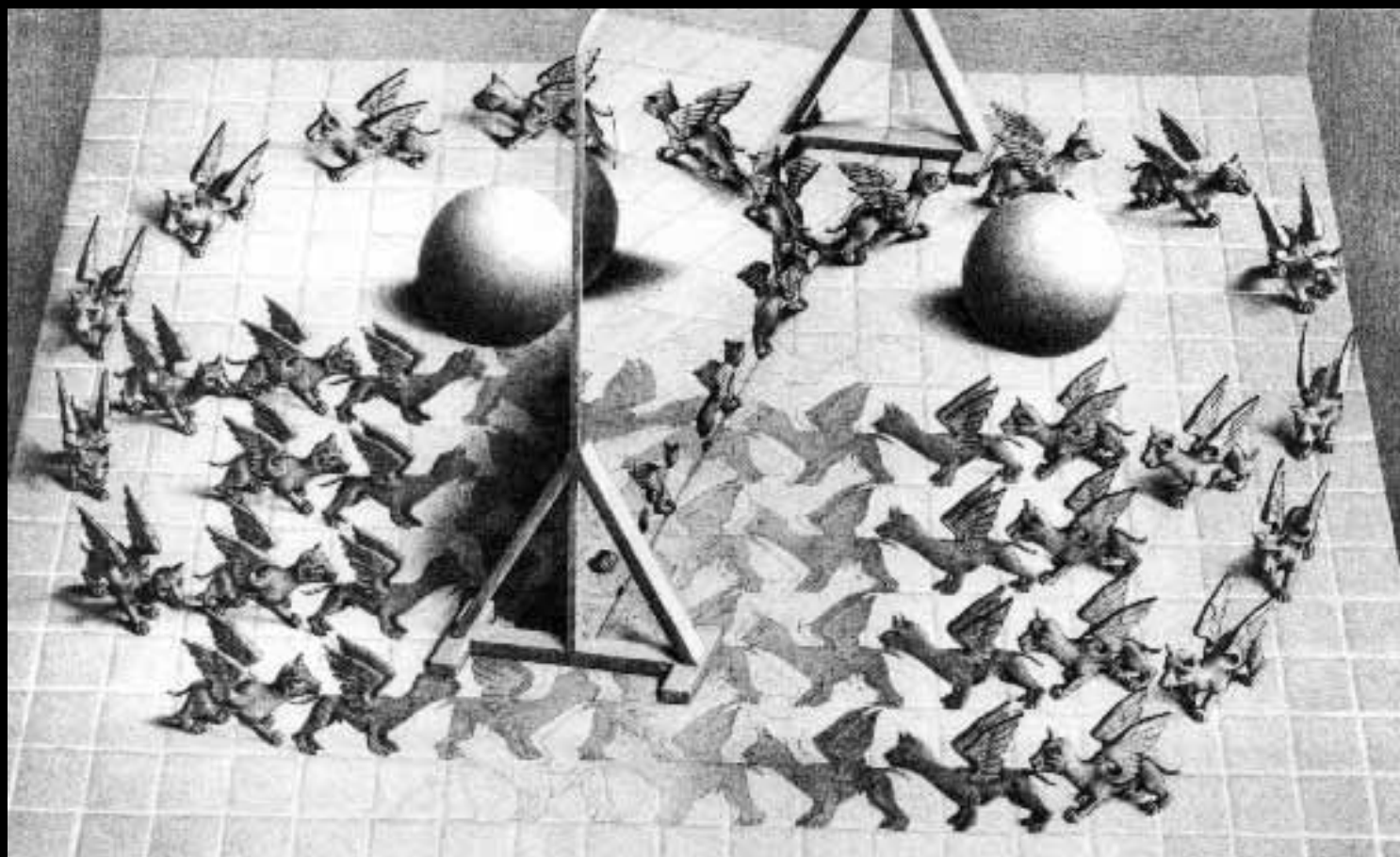
Teorém Noetherové: vztah mezi symetriemi a zákony zachování

## 2) Tvar fyzikálních zákonů je určen symetriemi

Typy částic v přírodě a způsob jejich interakce vyplývají ze symetrie

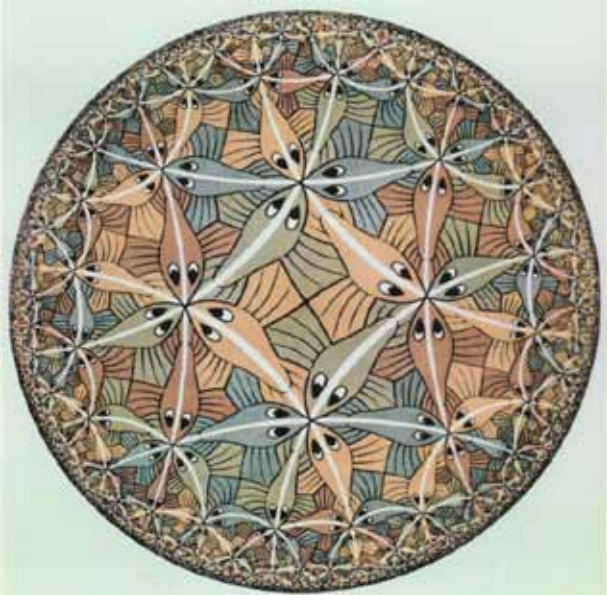


# Symetrie v matematice a fyzice



# Co je symetrie?

"A thing is symmetrical, if there is something that you can do to it, so that after you have finished doing it, it still looks the same as it did before you did it."



H. Weyl (1885-1955)



# Matematika symetrií: teorie grup

Leonhard **Euler** (1707-1783), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Niels Henrik **Abel** (1802-1829), Évariste **Galois** (1811-1832), Walther von **Dyck** (1856-1934), Marius Sophus **Lie** (1842-1899), Élie Joseph **Cartan** (1869-1951), .....

## Definice grupy:

Grupou nazýváme množinu

$$G = \{g_1, g_2, \dots\},$$

na níž je definována binární operace („násobení“)

$$(g_1, g_2) \mapsto g_3 = g_2 \circ g_1$$

s následujícími vlastnostmi:

$$1. \quad g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1$$

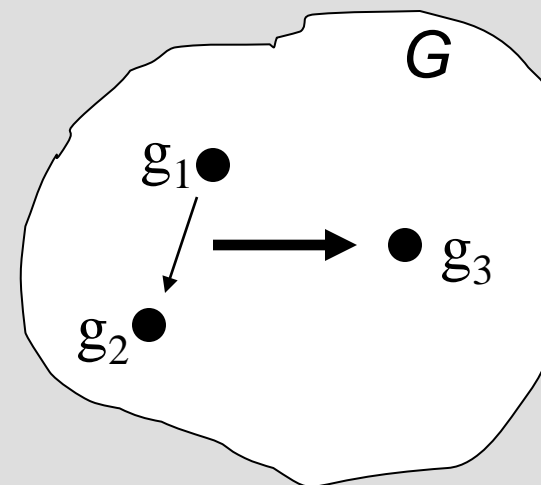
$$2. \quad g \circ 1 = 1 \circ g = g$$

$$3. \quad g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = 1$$

(asociativita)

(existence jednotkového elementu)

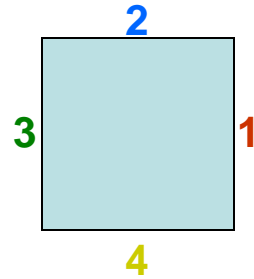
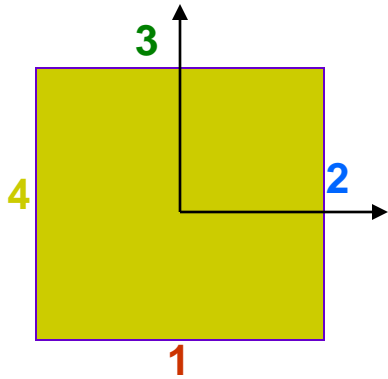
(existence inverzního elementu  
pro každý element  $g$ )



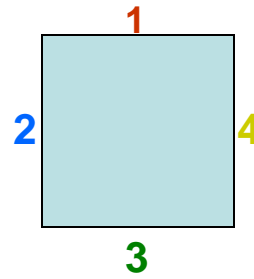
**Mezi požadované vlastnosti nepatří komutativita !**

# Symetrie čtverce

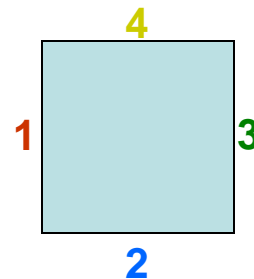
## Cyklická grupa $Z_4$ (diskrétní)



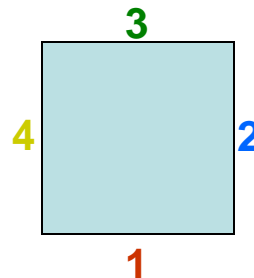
$$g_1 \equiv g(90^\circ) = g_3^{-1}$$



$$g_2 \equiv g(180^\circ) = g_2^{-1}$$



$$g_3 \equiv g(270^\circ) = g_1^{-1}$$

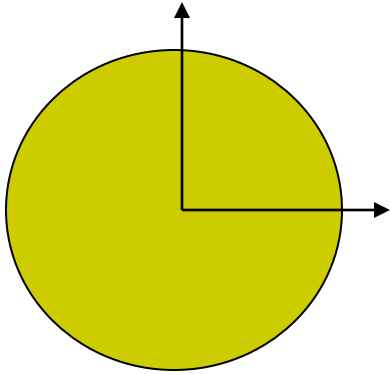


$$g_4 \equiv g(360^\circ) = 1$$

Otočení o úhel  
 $\varphi = \text{násobek } 90^\circ$

Grupová operace:  
skládání otočení

# Symetrie kruhu



## Unitární grupa U(1) (spojitá)



Sophus Lie (1842-1899)

Otočení o úhel  
 $\varphi = [0^\circ, 360^\circ)$

Grupová operace:  
skládání otočení

$$g^{-1}(j) = g(360^\circ - j)$$
$$g(360^\circ) = 1$$

Lieova grupa

↓  
Algebra

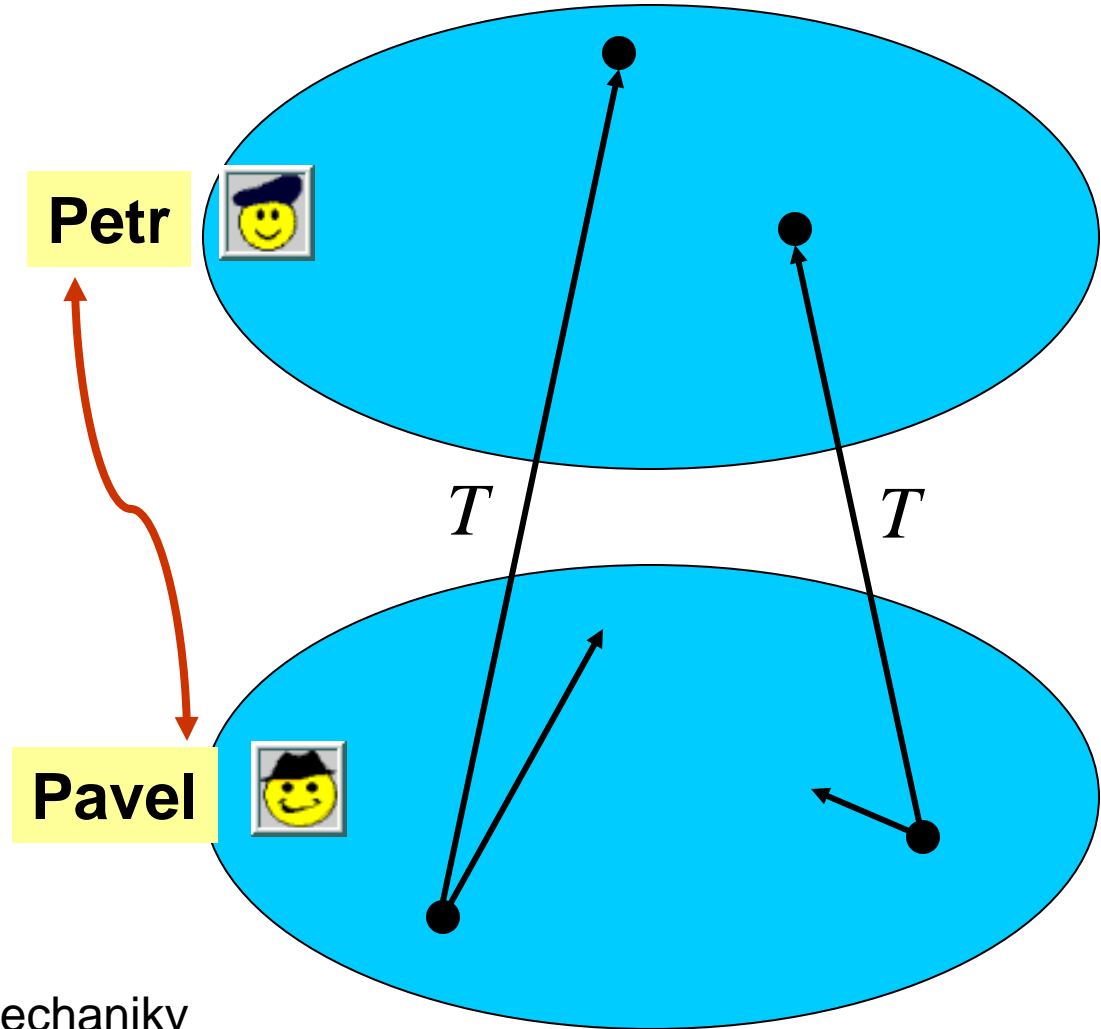
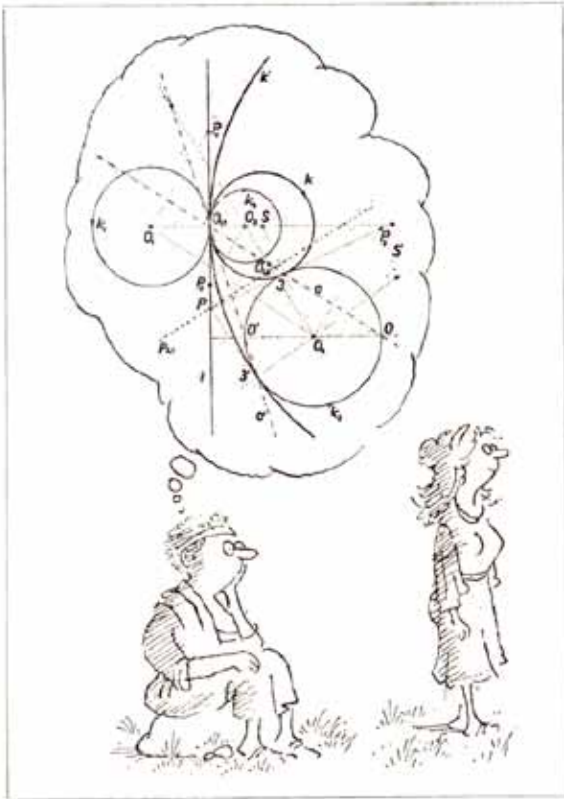
$$g(j_1, j_2, \dots) = e^{i \sum_k j_k G_k}$$

$$[G_i, G_j] = \sum_k a_{ijk} G_k$$

$$[a, b] = ab - ba$$

# Transformace mezi vztažnými soustavami

Matematická reprezentace reality – stavový prostor



Fázový prostor klasické mechaniky  
Hilbertův prostor kvantové mechaniky

# Transformace mezi vztažnými soustavami

Matematická reprezentace reality – stavový prostor

Transformace pozorovatelných:

$$A' = T \times A \times T^{-1}$$

Symetrie systému vůči transformaci  $T$

↳ nemění se hamiltonián  $H$

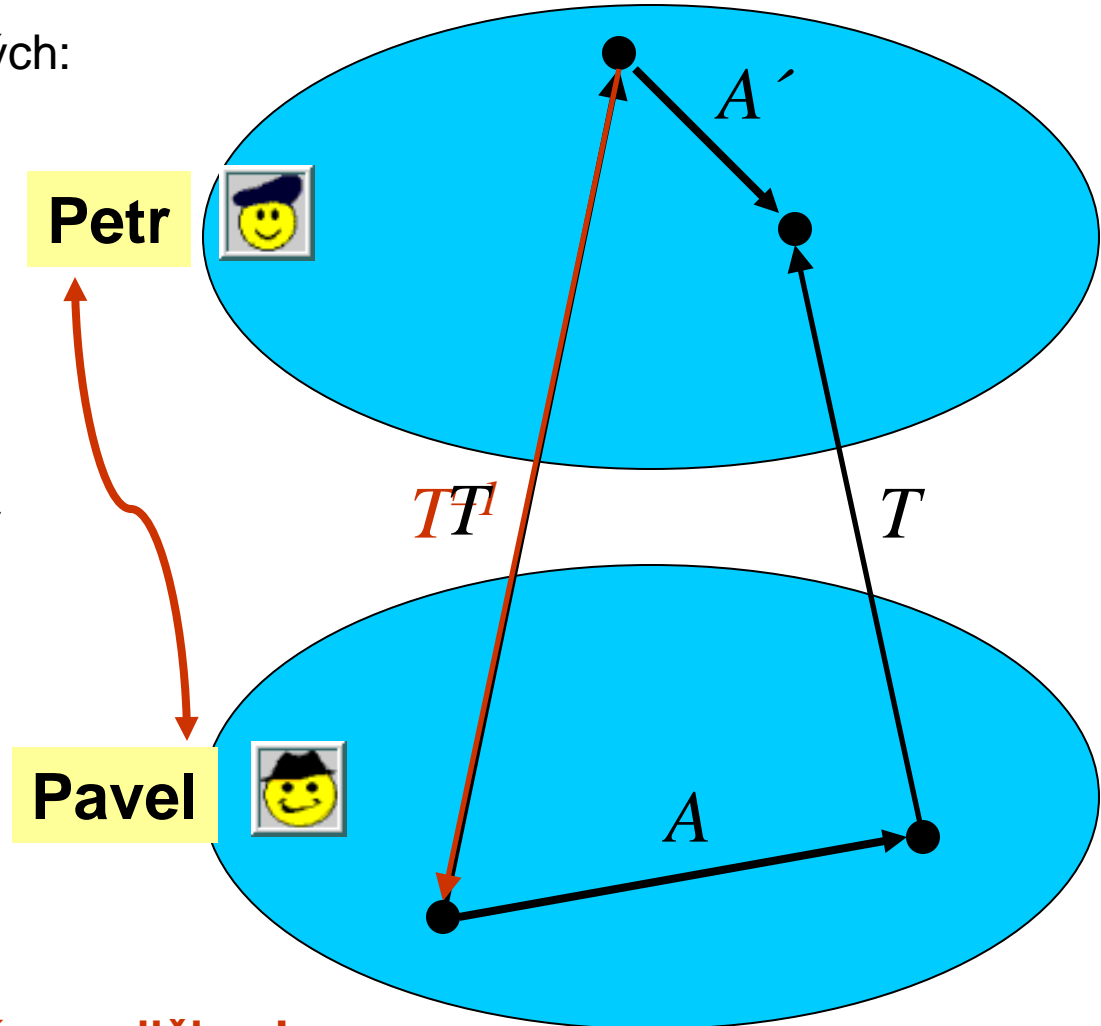
$$H' = H$$

$$T \times H \times T^{-1} = H$$

$$T \times H = H \times T$$

$T$  komutuje s  $H$

↳ **existence zachovávající se veličiny !**



# Teorém Noetherové (1918)

Symetrie systému popsaná Lieovou  
grupou s  $n$  spojitými parametry

$\beta$

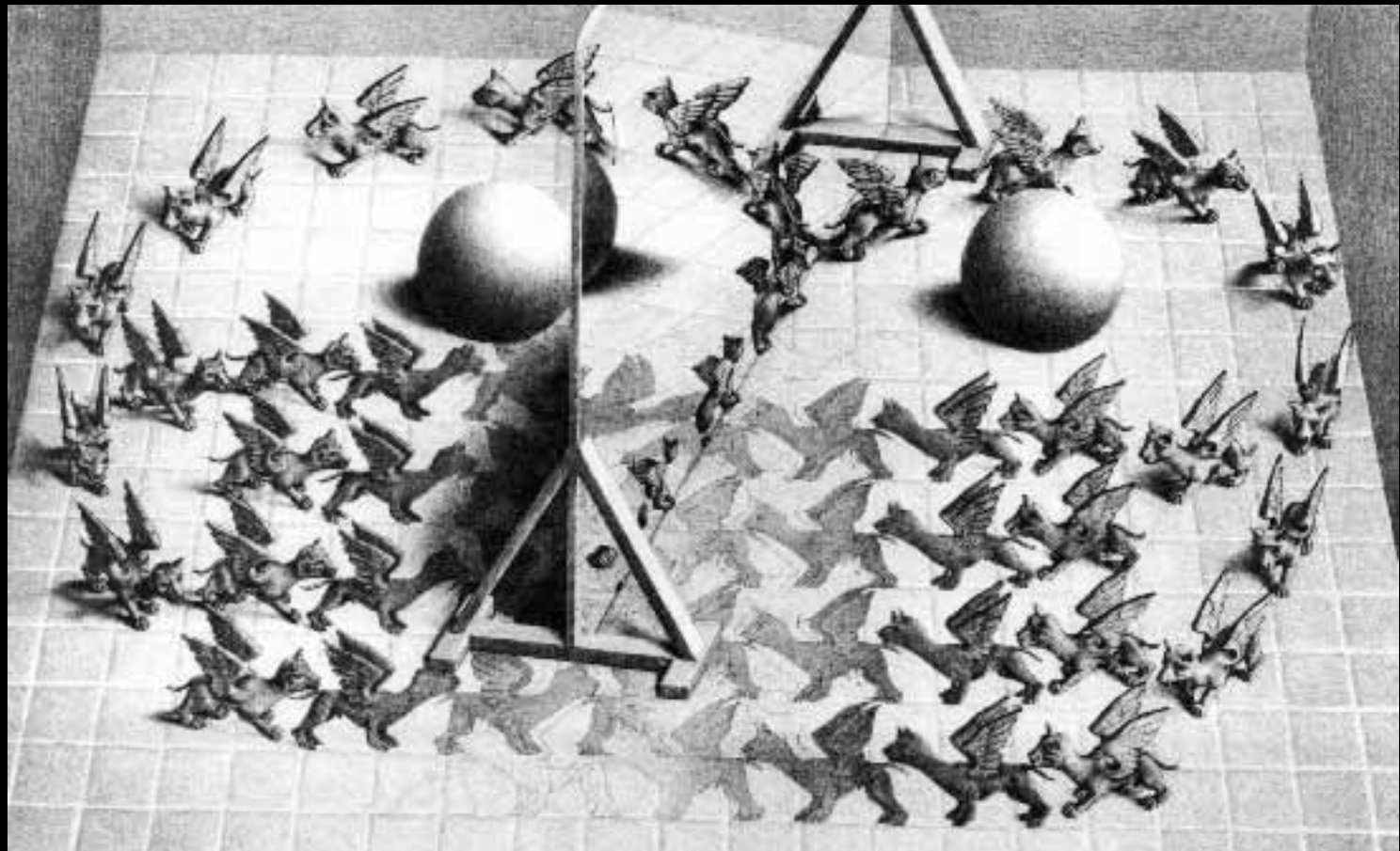
Existence  $n$  zachovávajících se  
fyzikálních veličin



Emmy Noether (1882-1935)

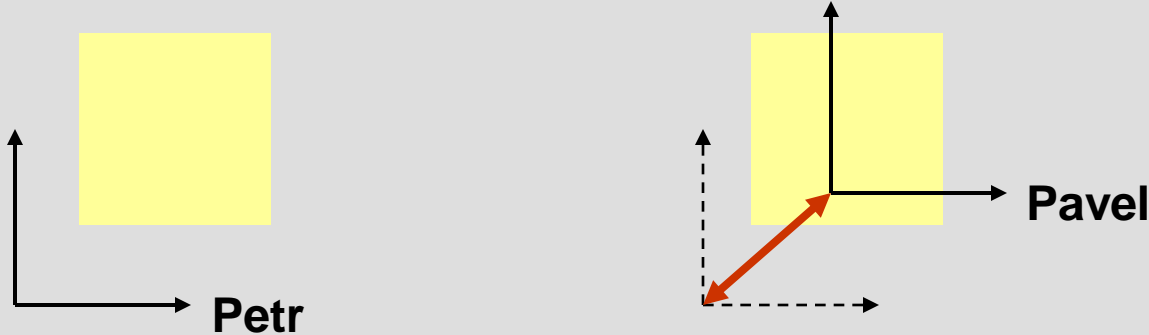
# Typy symetrie ve fyzice

- Časoprostorové symetrie
- Paritní symetrie
- Kalibrační symetrie
- Dynamické symetrie
- Supersymetrie
- .....



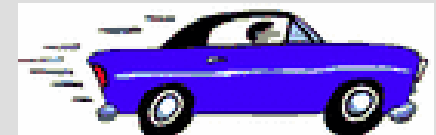
# Časoprostorové symetrie

Typ transformace: posunutí v prostoru



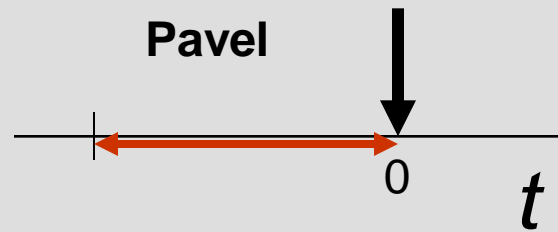
Zachovávaná se veličina: celková hybnost

$$p^0 (p_1, p_2, p_3)$$



# Časoprostorové symetrie

Typ transformace: posunutí v čase



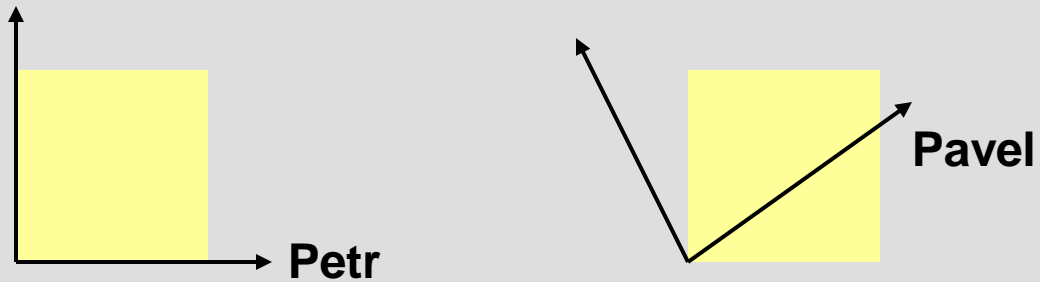
Zachovávající se veličina: celková energie

$E$



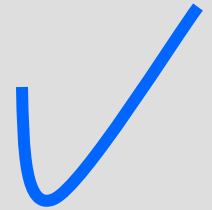
# Časoprostorové symetrie

Typ transformace: rotace v prostoru



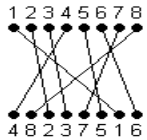
Zachovávající se veličina: celkový moment hybnosti

$$J^0 (J_1, J_2, J_3)$$



# Prostorové rotace pro bosony a fermiony

Nerozlišitelné  
kvantové částice



**Bosony**

(S.Bose, 1894-1974)



**Fermiony**

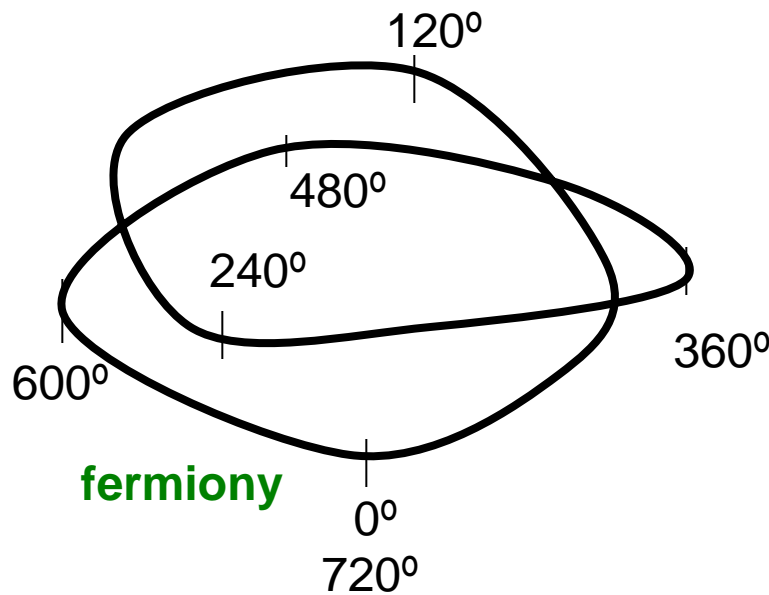
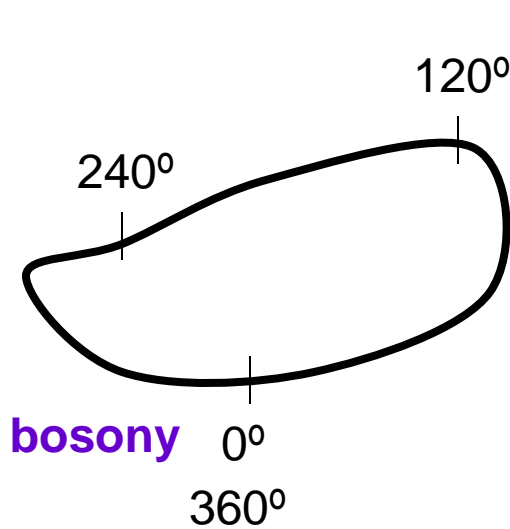
(E.Fermi, 1901-1954)



## Symetrie vůči permutační grupě

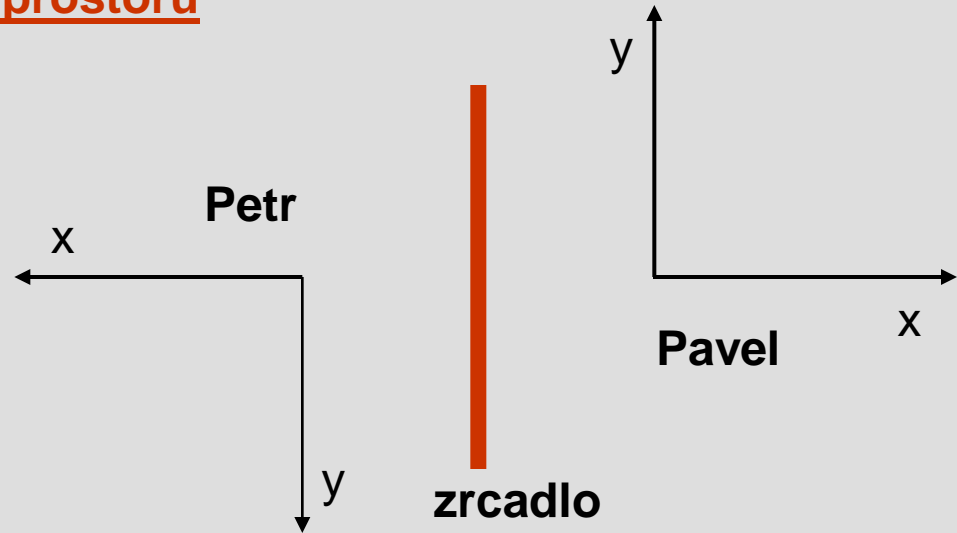
Bosony – vlnová funkce symetrická vůči záměnám

Fermiony – vlnová funkce antisymetrická vůči záměnám

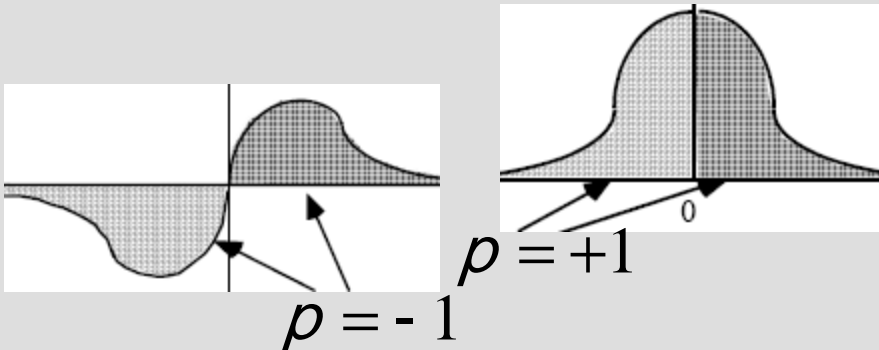


# Časoprostorové symetrie

Typ transformace: inverze prostoru



Zachovávající se veličina: prostorová parita



$$\rho = +1$$

$$- 1$$

**NE !!!**

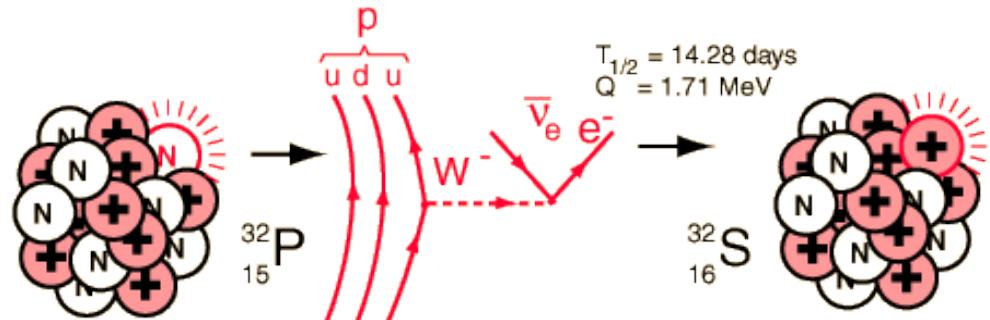
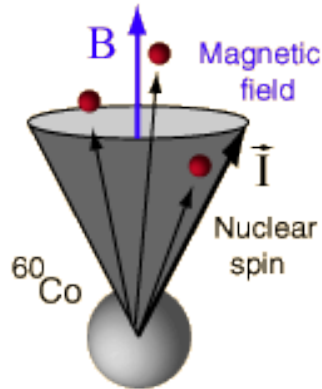
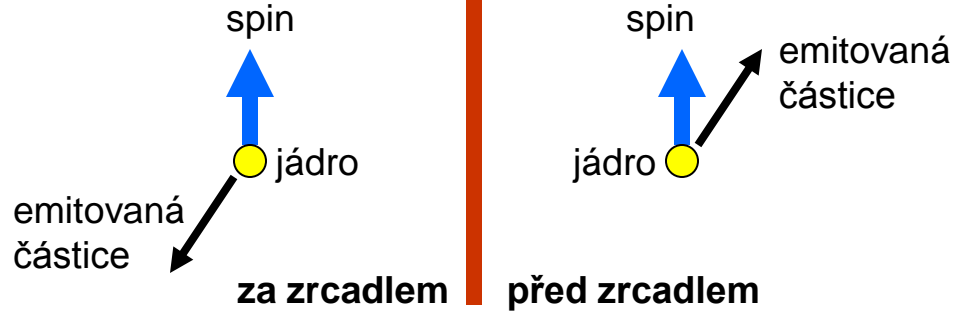
(pro slabé interakce)

C.S.Wu (1912-1997)



# Experimentální detekce nezachování parity (1957)

Idea:



$T_{1/2} = 14.28$  days  
 $Q = 1.71$  MeV



**Rozpad beta**

|                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| C <sup>6</sup>   | N <sup>7</sup>   | O <sup>8</sup>   | F <sup>9</sup>   |
| Si <sup>14</sup> | P <sup>15</sup>  | S <sup>16</sup>  | Cl <sup>17</sup> |
| Ge <sup>32</sup> | As <sup>33</sup> | Se <sup>34</sup> | Br <sup>35</sup> |

# Paritní symetrie

Typ transformace: inverze prostoru

**NE !!!**

Zachovávající se veličina: prostorová parita

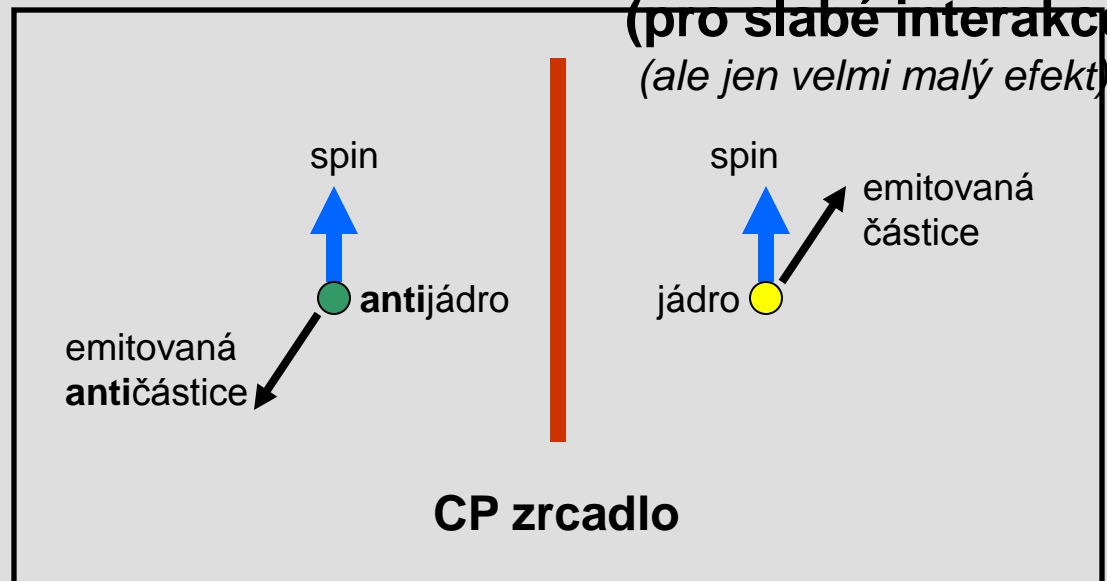
(pro slabé interakce)

Typ transformace: záměna částic za antičástice + inverze prostoru (CP)

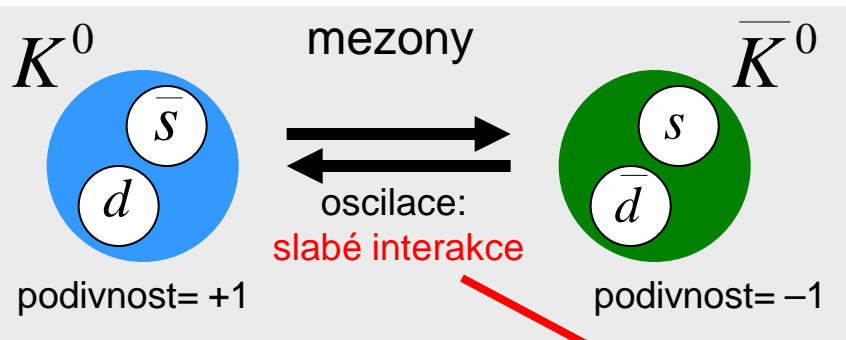
Zachovávající se veličina: kombinovaná (CP) parita

**NĚ !!!**

(pro slabé interakce)  
(ale jen velmi malý efekt)



produkce: silné interakce



rozpad: slabé interakce



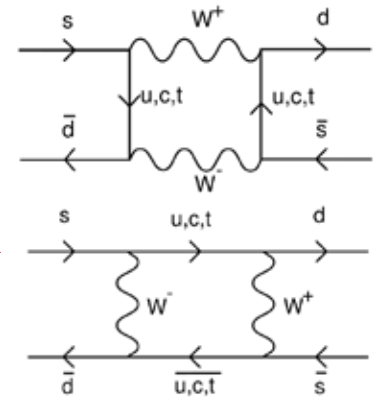
$K^0$  a  $\bar{K}^0$  nemají určené hodnoty CP-parity:

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

$K_1$  a  $K_2$  mají určené hodnoty CP-parity:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

$$CP|K_1\rangle = +|K_1\rangle \quad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle$$



Při zachování CP by  $K_1$  a  $K_2$  odpovídaly stacionárním módům oscilací.

Také rozpady těchto módů zachovávají CP.

$$|K_1\rangle \text{ ® } pp \quad |K_2\rangle \text{ ® } ppp, pm, pen$$

$$t_s \gg 0.9 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

$$t_L \gg 5.2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$t_{sc} \gg 3 \text{ cm}$$

$$t_{Lc} \gg 15 \text{ m}$$

Skutečnost: stacionární módy oscilací narušují CP:

$$|K_S\rangle \mu |K_1\rangle - \epsilon |K_2\rangle \quad |K_L\rangle \mu |K_2\rangle + \epsilon |K_1\rangle \quad \epsilon \gg 2.3 \cdot 10^{-3}$$

Proto se dají pozorovat také  $\pi\pi$  rozpady mezonu  $K_L$  (45 eventů z 22700). Experimentálně potvrzeno 1964



1980 Nobelova cena



JW Cronin (1931-) VL Fitch (1923-)

# Paritní symetrie

Typ transformace: inverze prostoru

**NE !!!**

Zachovávající se veličina: prostorová parita

(pro slabé interakce)

---

Typ transformace: záměna částic za antičástice + inverze prostoru (CP)

Zachovávající se veličina: kombinovaná (CP) parita

**NE !!!**

(pro slabé interakce)

*(ale jen velmi malý efekt)*

---

Typ transformace: záměna částic za antičástice + inverze prostoru

+ inverze času (CPT)

**SNAD ANO ?**

---

Typ transformace: inverze času

**PRAVDĚPODOBŇNĚ NE ?**

(pro slabé interakce)

*(ale jen velmi malý efekt)*

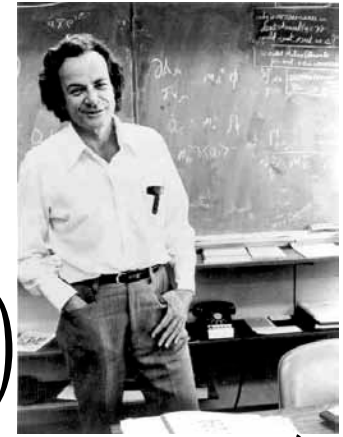
Proč svět není symetrický  
vzhledem k CP zrcadlení?

Protože kdyby byl, tak by  
se tomu neměl kdo divit!

**Narušení CP symetrie je pravděpodobnou příčinou  
přebytku hmoty nad antihmotou v raném vesmíru.**

# Kalibrační symetrie

Příklad: kvantová elektrodynamika (QED)



$$L = \left( i\hbar c \bar{\psi} \gamma^m \nabla_m \psi - mc^2 \bar{\psi} \psi \right) + \left( - \frac{1}{16\rho} F^{mn} F_{mn} \right) + \left( - q [\bar{\psi} \gamma^m \psi ] A_m \right)$$

Popisuje pole elektronů a pozitronů

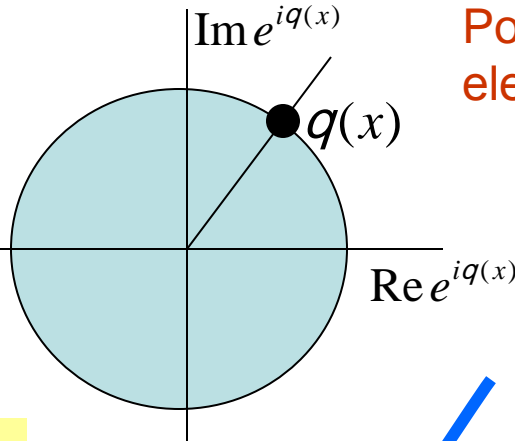
Popisuje pole fotonů  $F_{mn} = \nabla_m A_n - \nabla_n A_m$

Popisuje **interakce** elektronů, pozitronů a fotonů

Požadavek symetrie vůči transformaci

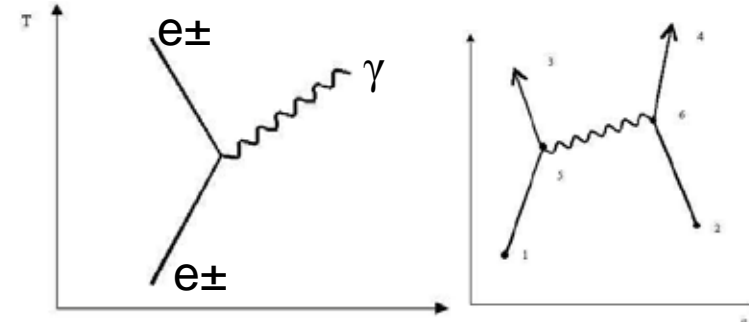
$$\psi \rightarrow e^{iq\alpha(x)/\hbar} \psi$$

**Lokální U(1) symetrie pro pole nabitých částic**



$$A_m \rightarrow A_m + \nabla_m \alpha$$

**Kalibrační symetrie elektromagnetického pole**



Zachovávající se veličina: **elektrický náboj**

# Dynamické symetrie

Konkrétní fyzikální systémy mohou mít větší symetrie než jen zmíněné časoprostorové symetrie:  $G_{\text{dynamika}} \supseteq G_{\text{časoprostor}}$

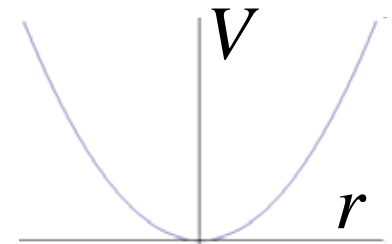
## Příklad 1: Harmonický oscilátor

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{k}{2}} x + \frac{i}{\sqrt{2m}} p \quad \mathfrak{h}$$

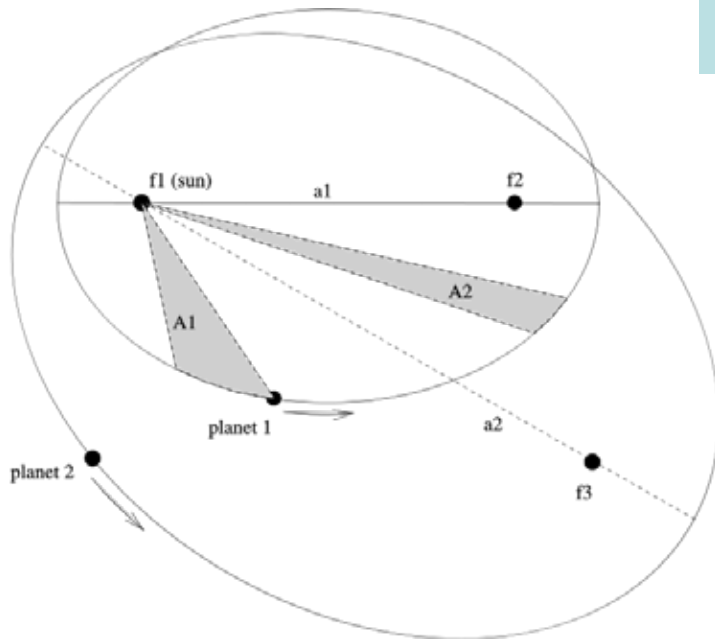
$$E = \frac{1}{2m} |p|^2 + \frac{k}{2} |x|^2$$

$$E = |z|^2$$

$$U(3) \hat{=} SO(3)$$

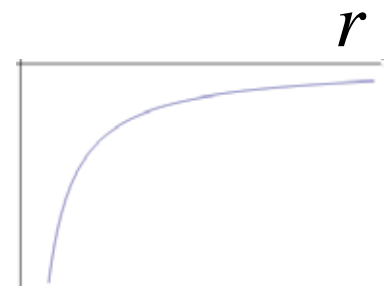


## Příklad 2: Keplerův systém



$$E = \frac{1}{2m} |p|^2 - k \frac{1}{|x|}$$

$$SO(4) \hat{=} SO(3)$$



J. Kepler (1571-1630)



# Budoucnost: **Supersymetrie?**



**Bosony**  $[x,y]=z$

**supergrupa / superalgebra**

$z=\{x,y\}$  **Fermiony**

foton  
gluon  
Z, W...

*selektron*  
*sneutrino*  
*skvark...*

$[\text{sudý}, \text{sudý}] = \text{sudý}$   
 $[\text{sudý}, \text{lichý}] = \text{lichý}$   
 $\{\text{lichý}, \text{lichý}\} = \text{sudý}$

$\{\text{||}\mu\lambda', \text{||}\mu\lambda\} = \text{gnq}\lambda$   
 $[\text{gnq}\lambda', \text{||}\mu\lambda] = \text{||}\mu\lambda$   
 $[\text{gnq}\lambda', \text{gnq}\lambda] = \text{gnq}\lambda$

*fotino*  
*gluino*  
*Zino, Wino...*

elektron  
neutrino  
kvark...

Komutativitu porušují nejen elementy  $g(\varphi)$ , ale i proměnné  $\varphi$ :

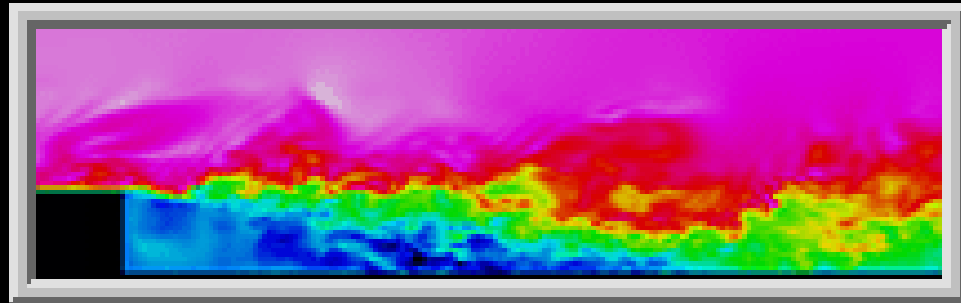
$j_1 \times j_2 = j_2 \times j_1$  obyčejné proměnné  
 $f_1 \times f_2 = - f_2 \times f_1$   
 $f^2 = 0$   
 $j \times f = f \times j$

**Grassmanovy proměnné**



H.G.Grassmann (1809-1877)

# Absence symetrie: Chaos?



**Ne!** I chaos má své skryté symetrie, svou matematiku. Možná ještě mnohem krásnější než „sphairos“!

Podle Empedokla (cca.490-430 př.n.l.) se reálný svět (*Cosmos*) rodí střetem světa dokonalého pořádku (*Sphairos*) se světem naprostého nepořádku (*Chaos*).



I had a feeling once about Mathematics, that I saw it all—Depth beyond depth was revealed to me—the Byss and the Abyss. I saw, as one might see the transit of Venus—or even the Lord Mayor's Show, a quantity passing through infinity and changing its sign from plus to minus. I saw exactly how it happened and why the tergiversation was inevitable: and how the one step involved all the others. **It was like politics.** But it was after dinner and I let it go!

Winston Churchill, *My Early life: 1874 - 1904*