

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Michal Peller

Monodromie v klasické mechanice

Ústav částicové a jaderné fyziky

Vedoucí bakalářské práce: *Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.*

Studijní program: *FYZIKA*
Studijní obor: *Obecná fyzika*

2007

Rád bych na tomto místě poděkoval *Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.*, za množství cenných rad a podnětných připomínek, které mi velmi pomohly při zpracování této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne

Michal Peller

Obsah

1	Úvod	5
2	Invarianty pohybu	6
3	Integrabilní systémy a jejich přiblížení	13
3.1	Integrabilní systémy	13
3.2	Souřadnice akce-úhly	17
3.3	KAM teorém	20
4	Topologická struktura fázového prostoru	24
4.1	Základní pojmy	24
4.2	Monodromie	26
5	Monodromie v klasické mechanice	28
5.1	Bifurkační diagram \mathcal{EM} zobrazení	29
5.2	Topologie fibrů	31
5.2.1	Regulární fibr	31
5.2.2	Singulární fibr	33
5.3	Klasická monodromie	38
6	Monodromie v kvantové mechanice	40
7	Závěr	41
	Matematické poznámky	42
	Literatura	44

Název práce: *Monodromie v klasické mechanice*

Autor: *Michal Peller*

Katedra: *Ústav částicové a jaderné fyziky*

Vedoucí bakalářské práce: *Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.*

e-mail vedoucího: *cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz*

Abstrakt: *Předložená práce podává přehled základních matematických konstrukcí nutných k formálnímu zavedení pojmu monodromie. Následně jsou tyto koncepty aplikovány na případ systémů v klasické mechanice. V topologii monodromie popisuje způsob jak se změjí jisté objekty při průchodu uzavřenou smyčkou. Jako speciální případ, při aplikaci na klasickou mechaniku, představuje monodromie překážku znemožňující globální zavedení proměnných akce-úhly. Základní vlastností monodromie je její nezávislost na volbě konkrétních souřadnic.*

Klíčová slova: *monodromie, integrabilita, akce-úhly, KAM teorém*

Title: *Monodromy in classical mechanics*

Author: *Michal Peller*

Department: *Institute of Particle and Nuclear Physics*

Supervisor: *Doc. RNDr. Pavel Cejnar, Dr.*

Supervisor's e-mail address: *cejnar@ipnp.troja.mff.cuni.cz*

Abstract: *In the present work we give a review of basic mathematical concepts related to monodromy and introduce topological structure of the phase space in general. Then we apply main ideas to classical mechanics. In topology, monodromy is the study of how certain objects behave as they run round some singularity. In classical mechanics, monodromy is topological obstruction to action-angle variables. Main property of monodromy is coordinateless character.*

Keywords: *monodromy, integrability, action-angle variables, KAM theorem*

1 Úvod

Pojem monodromie byl v klasické mechanice zaveden před více než 20 lety, kdy vznikly první významné články na toto téma. Z dnešního pohledu byla nejdůležitější práce Duistermaata, který představil monodromii jako překážku znemožňující globální zavedení proměnných akce-úhly. Ukazuje se, že častým důvodem je přítomnost jistých singulárních trajektorií, které jsou spjaty s nějakým nestabilním bodem systému. V současné době existuje celá řada článků, které zkoumají monodromii, ale i její praktické zobecnění pro klasické i kvantové systémy. Většina těchto článků je matematická, což je možná důvod, proč je monodromie stále v pozadí zájmu fyzikální veřejnosti. Na druhou stranu bez odpovídající abstraktní matematiky není možné popsat většinu krásných vlastností, které monodromie nabízí.

Pojem monodromie je úzce svázán s pojmem integrabilního systému. To je systém, který má tolik nezávislých invariantů pohybu, kolik má stupňů volnosti. Lze ukázat, že je to maximální možný počet. Není však pravda, jak by se podle názvu mohlo zdát, že jde o systémy, které lze analyticky vyřešit. Při popisu monodromie se využívá konceptu založeného na invariantech pohybu, a proto byla dlouhou dobu monodromie zavedena pouze pro integrabilní systémy. Nedávno se podařilo dokázat, že i v systémech, které vzniknou malou perturbací integrabilního systému (vznikne obecně neintegrabilní systém), se vlastnosti monodromie zachovávají z její integrabilní části.

Struktura celé práce je taková, že jsou nejprve vysvětleny nejzákladnější vlastnosti invariantů pohybu v Hamiltonově mechanice. Následně jsou tyto výsledky využity k zavedení integrabilních systémů, které svým způsobem vystihují proměnné akce-úhly. Dále je popsán abstraktní pojem monodromie a následně studován pro případ klasické mechaniky.

Závěrem je třeba zmínit, že obrázky zde prezentované byly převzaty z článků uvedených v referencích a případně byly dodatečně upraveny.

2 Invarianty pohybu

Pro účely zavedení pojmu integrability hamiltonovských systémů je velmi důležité porozumět způsobu práce s *invarianty pohybu* v klasické mechanice. Invariantem pohybu rozumíme fyzikální veličinu, která je konstantní v průběhu vývoje daného fyzikálního systému. Užitečným nástrojem pro zkoumání zachovávajících se veličin jsou *Poissonovy závorky*. Jejich obrovský význam spočívá v tom, že

- poskytují spojení mezi klasickou a kvantovou mechanikou,
- umožňují hledat invarianty pohybu bez nutnosti znát řešení Hamiltonových rovnic.

Pokud budeme uvažovat systém s n stupni volnosti, lze tento systém popsat *Hamiltoniánem*

$$H(q_i, p_i, t) \equiv H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t),$$

kde q_i jsou zobecněné souřadnice polohy a p_i jsou zobecněné souřadnice hybnosti. Dynamika takového systému se pak řídí sadou Hamiltonových rovnic

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

Poissonova závorka pro dvě funkce $F(q_i, p_i, t)$ a $G(q_i, p_i, t)$, které jsou definovány na fázovém prostoru a závisí také explicitně na čase t , je dána vztahem

$$\{F, G\} \equiv \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right). \quad (2.2)$$

Takto zavedená Poissonova závorka má řadu důležitých vlastností, z nichž některé jsou uvedeny v Dodatku A.

Pokud nás nyní bude zajímat změna funkce $F = F(q_i(t), p_i(t), t)$ podél trajektorie splňující Hamiltonovy rovnice (2.1), pak pro časovou derivaci F platí

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.3)$$

V případě, že se omezíme pouze na takové zachovávající se fyzikální veličiny, které nezávisí explicitně na čase, můžeme si je představit jako funkce

fázového prostoru $F(q_i, p_i)$. Protože však $dF/dt = 0$, dostáváme s využitím vztahu (2.3) důležitý důsledek

$$\boxed{\begin{array}{c} F \text{ je invariant pohybu} \\ \Updownarrow \\ \{F, H\} = 0 \text{ pro všechny body fázového prostoru.} \end{array}}$$

Nyní aplikujeme předchozí výsledek na energii, hybnost a moment hybnosti.

Energie: Z antisymetrie Poissonovy závorky máme $\{H, H\} = 0$. Není však obecně pravda, že energie je zachovávaná se veličina (energie může explicitně záviset na čase). Z (2.3) však plyne zajímavý vztah

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamiltonián je tedy invariant pohybu právě když nezávisí explicitně na čase tj. $\partial H/\partial t = 0$.

Hybnost: V případě, že Hamiltonián nezávisí explicitně na některé zobecněné souřadnici q_k , pak z Hamiltonových ronic dostáváme

$$\{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

a tedy sdružená hybnost p_k je invariant pohybu. Souřadnice q_k se nazývá *cyklická*.

Moment hybnosti: Lze ukázat, že v případě sféricky symetrických potenciálů jsou momenty hybnosti zachovávaná se veličiny. Tj. pokud

$$V(x, y, z) = V(r),$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pak

$$L_x = yp_z - zp_y, \quad L_y = zp_x - xp_z, \quad L_z = xp_y - yp_x,$$

jsou invarianty pohybu. Navíc zcela obecně platí

$$\{L_x, L_y\} = L_z, \quad \{L_z, L_y\} = L_x, \quad \{L_x, L_z\} = L_y.$$

Nulovost Poissonovy závorky $\{F, G\} = 0$ pro funkce F, G definované na fázovém prostoru má také pěkný geometrický význam. Úpravami vztahu (2.2) dostáváme

$$0 = \{F, G\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) =$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, \frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial G}{\partial p_n}, -\frac{\partial G}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial G}{\partial q_n} \right).$$

Poslední výraz je ovšem skalární součin v našem $2n$ dimenzionálním fázovém prostoru, přičemž první vektor je gradient* funkce F a druhý je kolmý na gradient funkce G , jak lze snadno ověřit. To znamená, že v libovolném bodě fázového prostoru je gradient funkce F kolmý na konkrétní vektor z tečné nadroviny k ekviploše† funkce G . Hlubší souvislost uvidíme, pokud přepíšeme předchozí výsledek následovně

$$\{F, G\} = \nabla F \cdot \mathbb{J} \cdot \nabla G,$$

kde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

je takzvaná symplektická matice typu $2n \times 2n$ a $\mathbf{1}$ je jednotková matice řádu $n \times n$. Vektorové prostory, které jsou opatřeny součinem $\mathbf{x} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{y}$ se nazývají *symplektické prostory* a představují ryze matematický model, pro geometrické zkoumání Hamiltonovských systémů. Je vidět, že takovýto součin představuje jakousi analogii skalárního součinu, ale skalárním součinem není, protože daná operace je antisymetrická. Platí totiž

$$\mathbb{J}^T = \mathbb{J}^{-1} = -\mathbb{J}.$$

Přesto se prakticky stejně zavádějí pojmy jako je kolmost a platí také obdobná tvrzení (podrobně viz. [1]). Navíc symplektická matice nese informaci o tvaru Hamiltonových rovnic. Stačí si totiž povšimnout, že platí

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbb{J} \cdot \nabla H(\mathbf{z}), \tag{2.4}$$

kde jsme pouze označili $\mathbf{z} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$.

*rovnou si představujte pouze směr největšího nárůstu funkce

†ekviplochou funkce G rozumíme množinu $\{P \in \mathcal{M}^{2n}; G(P) = \text{konst.}\}$, kde \mathcal{M}^{2n} představuje $2n$ dimenzionální fázový prostor

Symplektická matice má další pozoruhodnou vlastnost, kterou jsme již měli možnost vidět. Totiž pro daný bod fázového prostoru "udělá" z gradientu ∇G vektor $\mathbb{J} \cdot \nabla G$, který je v uvažovaném bodě tečný k ekviploše funkce G . Uvažujeme-li například $\mathbb{J} \cdot \nabla H$, ve všech bodech fázového prostoru, dostáváme vektorové pole rychlostí zkoumaného systému. Naše předchozí pozorování můžeme nyní shrnout do následujícího tvrzení.

Pokud $\{F, G\} = 0$, pak pro každý bod fázového prostoru platí:

Hodnota funkce F se zachovává ve směru tečného vektoru $\mathbb{J} \cdot \nabla G$, který leží v tečné nadrovině k ekviploše funkce G .

Protože $0 = \{F, G\} = -\{G, F\}$, platí předchozí tvrzení i obráceně, přesněji řečeno při záměně F a G .

Doposud jsme si nepoložili otázku, jaký je maximální počet "nezávislých" invariantů pohybu definovaných na fázovém prostoru dimenze $2n$, kde n je počet stupňů volnosti systému. Existence l nezávislých zachovávajících se veličin znamená, že trajektorie představující vývoj systému bude omezena na podmnožinu fázového prostoru dimenze $2n - l$. Pokud by však bylo l větší než počet stupňů volnosti n , pak by všechny trajektorie ve fázovém prostoru byly omezeny na dimenzi menší než n , což je spor s tím, že n je minimální počet parametrů nutných k určení konfigurace systému. Nezávislost zde tedy znamená lineární nezávislost gradientů $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$.

Pro každý hamiltonovský systém s n stupni volnosti platí:

Existuje nejvýše n nezávislých invariantů pohybu.

Z předchozího tedy plyne, že pokud máme F_1, \dots, F_n nezávislých invariantů pohybu, pak pro každý další invariant pohybu G platí, že ∇G je lineární kombinací gradientů $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$. To však platí pro konkrétní bod fázového prostoru a tedy koeficienty lineární kombinace závisí obecně na poloze ve fázovém prostoru. Integrací lineárních kombinací $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$ s koeficienty závislými na proměnných fázového prostoru *můžeme vygenerovat všechny invarianty pohybu*.

Mějme n nezávislých funkcí F_1, \dots, F_n (ne nutně invariantů) a funkci G splňující vztahy pro *involuci*

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \text{a} \quad \{G, F_i\} = 0,$$

pak funkci $G(q_i, p_i, t)$ můžeme vyjádřit jako funkci n proměnných

$$G(F_1, \dots, F_n, t) \equiv G(F_1(q_i, p_i), \dots, F_n(q_i, p_i), t).$$

Speciálně pokud F_1, \dots, F_n jsou *invarianty pohybu*, pak lze vyjádřit Hamiltonián $H(q_i, p_i, t)$ jako funkci

$$H(F_1, \dots, F_n, t) \equiv H(F_1(q_i, p_i), \dots, F_n(q_i, p_i), t).$$

Důkaz.

Důkaz lze provést čistě analyticky s využitím věty o implicitních funkcích. Zde bych raději naznačil geometricky orientovaný důkaz tohoto tvrzení.

Dokážeme, že na každé podmnožině fázového prostoru, kde se současně zachovávají funkce F_1, \dots, F_n se nutně zachovává také funkce G . Tím bude důkaz hotov. Uvažujme-li tedy množinu \mathcal{V} takových bodů fázového prostoru, pro které jsou funkce F_1, \dots, F_n současně konstantní, pak z nezávislosti gradientů ∇F_i je zřejmé, že tato množina má dimenzi n . A tedy v každém bodě množiny \mathcal{V} máme n nezávislých tečných směrů.

Nyní ukážeme, že pro zvolený bod fázového prostoru leží tyto tečné směry v tečné nadrovině ekviplochy funkce G . Jinými slovy ve všech směrech, v kterých se současně zachovávají funkce F_1, \dots, F_n se zachovává také G . Jak již víme, nulovost Poissonových závorek nám zaručuje, že v každém bodě fázového prostoru je gradient ∇G kolmý na tečné vektory $\mathbb{J} \cdot \nabla F_i$ a to pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. To znamená, že $\mathbb{J} \cdot \nabla F_i$ leží v tečné nadrovině, která je v daném bodě fázového prostoru tečná k ekvipose funkce G . Protože gradienty ∇F_i jsou podle předpokladu lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé také tečné vektory $\mathbb{J} \cdot \nabla F_i$. A tedy jde o n nezávislých vektorů. Nyní si stačí pouze uvědomit, že každá z funkcí F_1, \dots, F_n se zachovává ve směru vektorů $\mathbb{J} \cdot \nabla F_i$. Jak víme, to plyne přímo z $\{F_i, F_j\} = 0$.

□

Předchozí tvrzení nyní využijeme k zavedení *přirozených* kanonických proměnných[‡]. Jak uvidíme, Hamiltonovy rovnice budou v těchto souřadnicích velmi jednoduché. Předpokládejme tedy, že máme Hamiltonovský systém s n

[‡]přechodem k těmto souřadnicím zůstane zachován tvar Hamiltonových rovnic, pouze "staré proměnné nahradí nové"

stupni volnosti, který lze popsat Hamiltoniánem $H(q_i, p_i)$. Dále nechť existuje n nezávislých invariantů pohybu F_1, \dots, F_n splňující vztahy pro involuci $\{F_i, F_j\} = 0$ a navíc $\{F_i, H\} = 0$. Pak podle předchozího tvrzení můžeme psát $H(F_1, \dots, F_n, t) \equiv H(F_1(q_i, p_i), \dots, F_n(q_i, p_i), t)$. První sadu Hamiltonových rovnic v souřadnicích q_i, p_i můžeme tak přepsat následovně

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial p_j}.$$

Nezávislost invariantů pohybu se rozumí nezávislost gradientů $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$. Jejich nezávislost zůstane zachována výběrem vhodných n složek. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že jde právě o proměnné p_1, \dots, p_n , jinak bychom provedli přeznačení tj.

$$\det \left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) \neq 0.$$

Sadu rovnic lze tak zapsat v kompaktnějším tvaru

$$\dot{\vec{q}} = \mathcal{P} \cdot \nabla_{F_1, \dots, F_n} H,$$

kde $\mathcal{P} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right)_{i,j=1}^n$ je regulární matice. Nyní definujme nové souřadnice takto

$$\begin{aligned} \vec{\theta} &= \mathcal{P}^{-1} \vec{q}, \\ \vec{F} &= \vec{F}(q_i, p_i). \end{aligned}$$

Není obtížné si rozmyslet[§], že jsme našli transformaci souřadnic $(\theta_i, F_i) \leftrightarrow (q_i, p_i)$ a v nových souřadnicích máme dynamické rovnice

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \frac{\partial H}{\partial F_j}, \\ \dot{F}_j &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_j}{\partial p_i} \dot{p}_i = \{F, H\} = 0. \end{aligned}$$

A tedy (θ_i, F_i) jsou kanonické proměnné. V kapitole 3.2 uvidíme, že lze za dodatečných (fyzikálně přijatelných) předpokladů zavést kanonické souřadnice *akce-úhly* (θ_i, I_i) , kde θ_i jsou 2π -periodické souřadnice, I_i odpovídají akcím. Dynamické rovnice mají potom tvar

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \omega_j(I_1, \dots, I_n) \equiv \frac{\partial H}{\partial I_j}, \\ \dot{I}_j &= 0. \end{aligned}$$

[§]stačí využít větu o implicitních funkcích na druhou rovnici a využít vztahu $\vec{q} = \mathcal{P} \vec{\theta}$

Vraťme se ještě ke kanonickým souřadnicím (θ_i, F_i) . Triviální integrací máme

$$\begin{aligned}\theta_j &= \frac{\partial H(F_1, \dots, F_n)}{\partial F_j} t + \alpha_j, \\ F_j &= \beta_j,\end{aligned}$$

kde α_j, β_j jsou integrační konstanty. Předchozí výpočty nyní shrneme.

Pokud existuje n nezávislých invariantů pohybu F_1, \dots, F_n splňující vztahy pro involuci

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \text{a} \quad \{H, F_i\} = 0,$$

pak existuje kanonická transformace $(q_i, p_i) \leftrightarrow (\theta_i, F_i)$ taková, že v nových proměnných platí

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \frac{\partial H}{\partial F_i}, \\ \dot{F}_i &= 0.\end{aligned}$$

Pokud Hamiltonián nezávisí explicitně na čase, pak dynamika systému je lineární v t .

3 Integrabilní systémy a jejich přiblížení

3.1 Integrabilní systémy

Hamiltonovský systém s n stupni volnosti se nazývá *integrabilní* pokud

- 1) existuje n invariantů pohybu F_1, \dots, F_n ,
- 2) $\{F_i, F_j\} = \{F_i, H\} = 0$,
- 3) $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$ jsou nezávislé skoro všude.

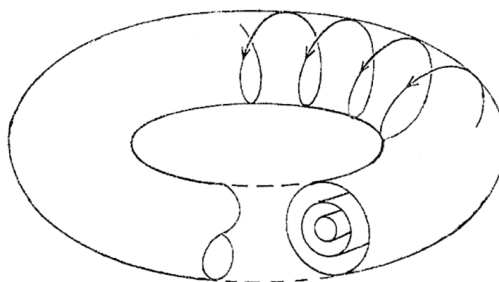
Integrabilní systémy mají dvě marginální vlastnosti:

a) Z kapitoly 2 o invariantech pohybu víme, že pro každý integrabilní systém můžeme alespoň lokálně* (v bodech, kde jsou gradienty nezávislé) zavést *kanonické* proměnné (θ_i, F_i) , ve kterých je dynamika řízena rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \frac{\partial H(F_1, \dots, F_n)}{\partial F_i}, \\ \dot{F}_i &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Odtud název *integrabilní* systémy.

b) Na každé souvislé komponentě[†] množiny $\cap_{i=1}^n F_i^{-1}(c_i)$, která je omezená, lze zavést 2π periodické souřadnice θ_i (viz. 5.2.1 bod a)). Trajektorie integrabilních systémů jsou pak kvalitativně orbity na toru T^n s pevnými frekvencemi ω_i . Fázový prostor je tak složen z množství torů, kde každý torus je invariantní vůči toku Hamiltonova pole (obrázek 1).



Obrázek 1: Fázový prostor integrabilního systému - množina torů

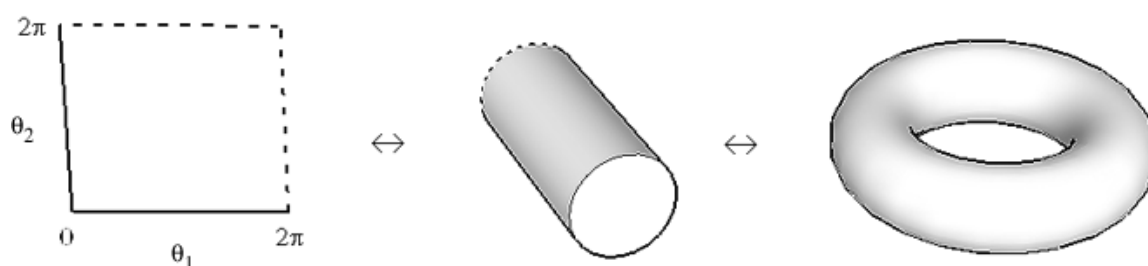
Tyto 2π periodické souřadnice θ_i tedy doplňují invarianty pohybu F_i , ale transformace $(q_i, p_i) \leftrightarrow (\theta_i, F_i)$ není obecně již kanonická. K tomu je nutné

*díky invariantnosti F_i však vždy obsáhneme celé trajektorie

[†]maximální souvislá podmnožina

zvolit jiné invarianty pohybu, takzvané akce I_i . Výsledkem jsou pak kanonické souřadnice akce-úhly (θ_i, I_i) . Proměnné (θ_i, F_i) však potřebujeme k důkazu, že správnou strukturou, na které existují trajektorie je právě torus. K tomu není třeba kanoničnost transformace, ale pouze její spojitost. Stačí si uvědomit, že v různých souřadnicích bude torus vypadat různě.

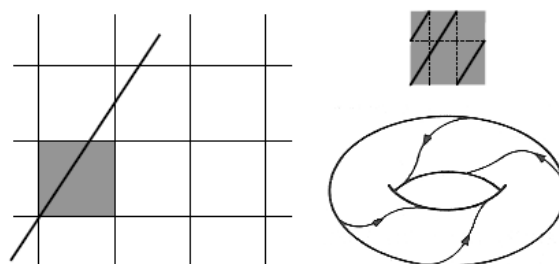
Pro případ $n = 2$ lze myšlenkově provést změnu souřadnic* (pouze v úhlech θ_i), jak je naznačeno na obrázku 2. Vycházíme z toho, že trajektorie v souřadnicích (θ_i, F_i) leží na čtverci bez dvou hran (F_1 a F_2 konstantní). Geometrická představa je taková, že v prvním kroku spojíme jednu dvojici protilehlých stran čtverce a v druhém kroku oba konce válce.[†] Protože u in-



Obrázek 2: Torus jako reprezentant trajektorií integrabilních systémů

tegrabilních systémů vždy existuje transformace $(q_i, p_i) \leftrightarrow (\theta_i, F_i)$, mluvíme o toru. Jako reprezentant totiž lépe vystihuje charakter trajektorií. Torus nelze žádnou transformací souřadnic převést například na sféru.

Je třeba dodat, že torus ve většině případů reprezentuje přímo samotnou trajektorii. Pokud jsou totiž frekvence ω_1, ω_2 z b) nesoudělné, vyplňuje trajektorie celý čtverec a tudíž i torus. V tomto případě nejsou trajektorie uzavřené.



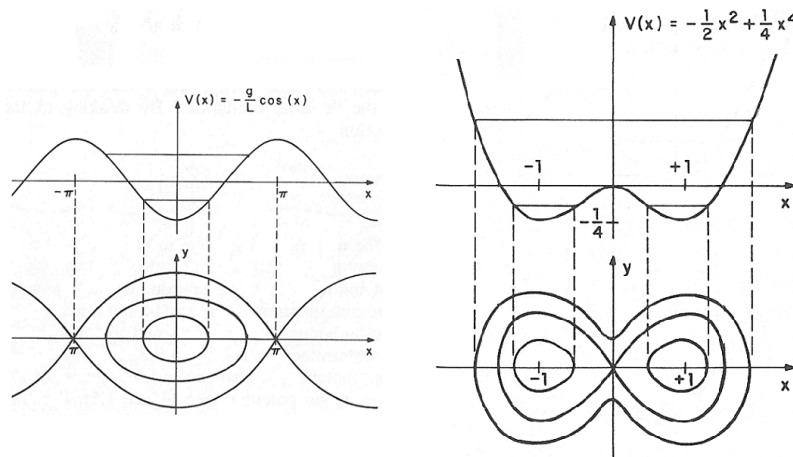
Obrázek 3: Trajektorie na toru jako lineární orbity

*formálně homeomorfismus tj. bijekci, která je spojitá včetně její inverze

[†]rozmyslete si, jaké části hran by musely být součástí čtverce, abychom dostali sféru!

Význam podmínek z definice integrabilního systému:

- 1) + 3) Kombinace těchto dvou podmínek zajišťuje existenci n nezávislých invariantů pohybu tj. maximálního možného počtu (viz. 2) . Na každý stupeň volnosti tak máme zákon zachování nějaké fyzikální veličiny - invariantu pohybu F_i .
- 2) Toto je klíčová podmínka, která zajišťuje existenci 2π periodických souřadnic θ_i jako doplněk k invariantům pohybu F_i (viz. 5.2.1).
- 3) Pokud gradienty $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$ jsou nezávislé v celém fázovém prostoru, pak souřadnice (θ_i, F_i) lze zavést globálně. Body, ve kterých tato podmínka není splněna nazýváme *singulární*. Tyto body jsou zajímavé tím, že poukazují na změnu určitých fyzikálních vlastností při průchodu fázovým prostorem. Například u matematického kyvadla jde o změnu



povahy pohybu, který odpovídá buď toru T^1 nebo přímce R^1 . Naopak v případě systému s kvartickým potenciálem $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$, jde o strukturální změnu rozložení trajektorií. Tím však zdaleka nekončí výčet možností, jejichž přítomnost je naznačována existencí singulárních bodů. Jednou z dalších takových možností je *monodromie*, hlavní téma této práce.

- 1) + 2) + 3) Alespoň lokálně lze zavést souřadnice (θ_i, F_i) , ve kterých je dynamika systému lineární v čase t .

Každá maximální souvislá a omezená část fázového prostoru, kde se zachovávají invarianty pohybu, je torus T^n .

V žádných souřadnicích nemůže jít třeba o sféru*.

*torus není homeomorfní se sférou

Není obtížné z definice nahlédnout, že každý systém s $n = 1$ je integrabilní. Ve vyšší dimenzi je integrabilní třeba systém dvou těles, které se přitahují gravitační silou. Nebo jakýkoliv systém, který si lze lokálně představit jako kmitání n nezávislých oscilátorů.

Jak lze však očekávat, mezi hamiltonovskými systémy je integrabilních systémů spíše málo. Tuto intuitivní představu podporují následující dvě matematická tvrzení:

- Pokud uvažujeme prostor analytických Hamiltonových funkcí \mathcal{H} , pak podle [3] jsou neintegrabilní hamiltoniány husté* v \mathcal{H} ,
- Podle [4] jsou integrabilní systémy v prostoru hladkých funkcí C^r pouze spočetným sjednocením řídkých[†] množin a nejsou tak husté v C^r .

Zjednodušeně řečeno, většina systémů je neintegrabilních. Integrabilních systémů je proto v jistém smyslu velmi málo. Přesto hrají zásadní roli, protože jejich znalost nám umožňuje získat informaci o neintegrabilních systémech, které jsou určitou poruchou systémů integrabilních. Takovýmto neintegrabilním systémům se říká *skoro integrabilní**. Ukazuje se, že v případě skoro integrabilních systémů je většina torů stabilních tj. malá pertubace hamiltoniánu nám umožní klasifikovat většinu trajektorií pertubovaného systému opět jako tory T^n . To není vůbec samozřejmé. Ba naopak je to spíše překvapivé. Toto tvrzení je obsahem slavné věty KAM.

Jiným způsobem (negeometricky) vyložené základní vlastnosti integrabilních systémů lze nalézt v textu [5].

*Množina Q je hustá v prostoru X , pokud každému bodu z X se lze libovolně blízko přiblížit body z Q nebo-li každý bod z X má nulovou vzdálenost od množiny Q .

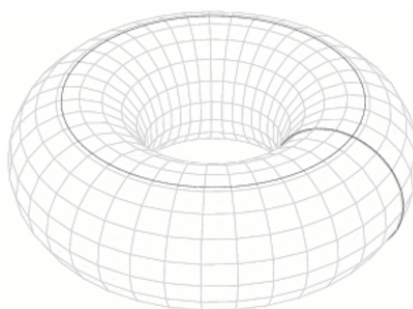
[†]Řídkou množinou rozumíme množinu, jejíž body se nelze přiblížit libovolně blízko všem bodům nějaké neprázdné otevřené podmnožiny celého prostoru (a tedy je "řídká").

*v anglicky psané literatuře se používá označení *nearly integrable* nebo *quasi-integrable*

3.2 Souřadnice akce-úhly

V této kapitole ukážeme, že v integrabilních systémech lze zavést kanonické proměnné (θ_i, I_i) , kde θ_i jsou 2π periodické souřadnice a I_i invarianty pohybu. Z konstrukce bude navíc zřejmé, že lze tyto souřadnice zavést alespoň lokálně v bodech, kde jsou gradienty ∇F_i lineárně nezávislé.

Z předchozí kapitoly víme, že každá omezená komponenta části fázového prostoru $\cap_{i=1}^n F_i^{-1}(c_i)$, kde se zachovávají invarianty pohybu, je ve vhodných souřadnicích torus T^n . Torus je přirozeně periodický objekt, který můžeme chápat jako součin n kružnic $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$. A tedy na toru existuje n uzavřených smyček S^1 (viz obrázek 4), které nelze na sebe spojitě deformovat. Tyto smyčky rozkládají jakýkoliv pohyb po toru na n -tici úhlů.



Obrázek 4: Rozklad pohybu na toru do uzavřených smyček

V původních souřadnicích (q_i, p_i) vypadá torus jinak, typicky je deformován. Lze ho získat řešením rovnic

$$F_1(q_i, p_i) = c_1, \dots, F_n(q_i, p_i) = c_n.$$

V tomto řešení nyní potřebujeme nalézt jakoukoli* n -tici uzavřených smyček $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, které nelze na sebe spojitě deformovat. Každou smyčku \mathcal{C}_i lze spočítat přidáním vhodných podmínek k předchozí sadě rovnic, kde se vyskytují jen některé proměnné. Pokud má následující soustava řešení, je nejjednodušší volba dodatečných podmínek taková, že pro \mathcal{C}_k řešíme

$$F_1(q_k, p_1, \dots, p_n) = c_1, \dots, F_n(q_k, p_1, \dots, p_n) = c_n.$$

Evidentně žádnou ze smyček nelze vynechat, jinak bychom přišli o část informace o původním pohybu. Existence takových smyček \mathcal{C}_k je zásadní předpoklad* pro zavedení proměnných akce-úhly!

*dále totiž uvidíme, že vždy dostaneme stejné akce

*pokud bychom měli například pouze částečný rozklad původního pohybu $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n-1}$, nikdy bychom z této informace nesestrojili n nezávislých proměnných a tedy ani bijekci $(q_i, p_i) \leftrightarrow (\theta_i, I_i)$

Pokud v souřadnicích (q_i, p_i) nalezneme uzavřené smyčky \mathcal{C}_k , můžeme zavést následující souřadnice nazývané *akce-úhly*. Nejprve definujeme akce takto

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}_k} \sum_{m=1}^n p_m dq_m,$$

kde $p_m = p_m(q_i, F_i)$ je inverzí vztahů $F_1(q_i, p_i) = c_1, \dots, F_n(q_i, p_i) = c_n$. Předchozí integrál je invariant vzhledem ke kanonickým transformacím. To znamená, že v libovolných kanonických souřadnicích jsou akce I_i stejné. Invariantnost je důsledek Liouvillova teorému ve tvaru

$$\sum_{m=1}^n \int dQ_m dP_m \stackrel{\text{(Liouville)}}{=} \sum_{m=1}^n \int dq_m dp_m$$

a následujícího výpočtu křivkového integrálu

$$\oint_{\mathcal{C}_k} p_m dq_m = \oint_{\mathcal{C}_k} (p_m, 0)(dq_m, dp_m) \stackrel{\text{(Green)}}{=} \iint_S \left(\frac{\partial p_m}{\partial p_m} - \frac{\partial 0}{\partial q_m} \right) dq_m dp_m.$$

Navíc ze Stokesova teorému plyne, že libovolná spojitá deformace smyček \mathcal{C}_k na toru nezmění hodnotu akcí I_i .

Sdružené proměnné tj. úhly dopočítáme z výrazu

$$\theta_k = \frac{\partial}{\partial I_k} S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n),$$

kde S je generující funkce* splňující $p_k = \frac{\partial}{\partial q_k} S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n)$. Generující funkci lze získat řešením rovnice pro hamiltonián v starých a nových souřadnicích, přičemž chceme nalézt takovou změnu souřadnic, tedy generující funkci S , aby akce I_i byly invarianty pohybu tj. hamiltonián v nových proměnných závisel pouze na akcích I_i

$$H(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}) = H(I_1, \dots, I_n), \quad (3.2)$$

kde I_1, \dots, I_n volíme při řešení (3.2) pevně.

*Podle principu generujících funkcí, podmínky

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\partial}{\partial I_k} S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n), \\ p_k &= \frac{\partial}{\partial q_k} S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n), \end{aligned}$$

zajišťují kanoničnost transformace $(q_i, p_i) \leftrightarrow (\theta_i, I_i)$. To lze snadno ověřit derivováním hamiltoniánu ve starých souřadnicích podle proměnných v nových souřadnicích a využitím platnosti Hamiltonových rovnic pro hamiltonián ve starých souřadnicích.

Pokud nalezneme S , můžeme k definovaným akcím I_i dopočítat úhly θ_i , máme zajištěnu kanoničnost transformace $(q_i, p_i) \leftrightarrow (\theta_i, I_i)$ a hamiltonián v nových souřadnicích závisí pouze na akcích I_i . Proto v nových souřadnicích dostáváme

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \frac{\partial H(I_1, \dots, I_n)}{\partial I_i} = \omega_i(I_1, \dots, I_n), \\ \dot{I}_i &= -\frac{\partial H(I_1, \dots, I_n)}{\partial \theta_i} = 0, \\ H &= H(I_1, \dots, I_n) = \omega_1 I_1 + \dots + \omega_n I_n.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Zatím pouze víme, že akce I_i jsou invarianty pohybu. Nyní se přesvědčíme o 2π periodičnosti proměnných θ_i . Zvolme libovolnou trajektorii, která je řešením rovnic (3.3) a označme uzavřené smyčky rozkládající její pohyb jako $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$. Potom

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_k} d\theta_l &= \oint_{\mathcal{C}_k} d \frac{\partial}{\partial I_l} S(q_1, \dots, q_n, I_1, \dots, I_n) = \\ &= \oint_{\mathcal{C}_k} \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_m \partial I_l} dq_m = \frac{\partial}{\partial I_l} \oint_{\mathcal{C}_k} \sum_{m=1}^n p_m dq_m = \\ &= 2\pi \frac{\partial}{\partial I_l} I_k = 2\pi \delta_{kl}\end{aligned}$$

Z vlastností generujících funkcí je také patrná forma řešení rovnice (3.2) pro pevné akce I_i

$$dS = \sum_{m=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = \sum_{m=1}^n p_i dq_i.$$

Ukázali jsem, že pokud je systém integrabilní, můžeme alespoň lokálně zavést proměnné akce-úhly, kde akce I_i jsou invarianty pohybu a θ_i jsou 2π periodické souřadnice. Podrobnější popis kanonických transformací lze nalézt ve výborné knize [2] o chaosu a integrabilních systémech. Konkrétně v kapitolách 2.3, 2.4 a 2.5.

Je zřejmé, že největší potíž pro zavedení proměnných akce a úhly je nalezení uzavřených smyček \mathcal{C}_k . Výjimku představují systémy s jedním stupněm volnosti tj. $n = 1$. Pokud totiž hamiltonián H nezávisí explicitně na čase t , je invariantem pohybu. Protože však fázový prostor je dvou dimenzionální, můžeme akci I hledat přímo pro pevnou energii E

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{H(q,p)=E} pdq.$$

To souvisí s tím, že systémy s jedním stupněm volnosti a se zachovávající se energií jsou vždy integrabilním systémem.

3.3 KAM teorém

Hamiltonovský systém s hamiltoniánem H se nazývá *skoro integrabilní*, pokud je perturbací nějakého integrabilního hamiltoniánu H_0 tj.

$$H(\theta_i, F_i) = H_0(F_i) + \epsilon H_1(\theta_i, F_i), \quad (3.4)$$

kde ϵ je malý pertubační parametr a (θ_i, F_i) jsou proměnné, které existují díky integrabilitě H_0 . Protože perturbaci řádu ϵ můžeme chápat tak, že v sobě zahrnuje i vyšší řády perturbace, lze například psát

$$H(\theta_i, F_i) = H_0(F_i) + \epsilon H_1(\theta_i, F_i) + \epsilon^2 H_2(\theta_i, F_i) + O(\epsilon^2).$$

Hamiltonovy rovnice takového skoro integrabilního systému mají tvar

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \omega_j(F_i) + \epsilon \frac{\partial H_1(\theta_i, F_i)}{\partial F_j} + \epsilon^2 \frac{\partial H_2(\theta_i, F_i)}{\partial F_j} + O(\epsilon^2), \\ \dot{F}_j &= -\epsilon \frac{\partial H_1(\theta_i, F_i)}{\partial \theta_j} - \epsilon^2 \frac{\partial H_2(\theta_i, F_i)}{\partial \theta_j} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Základní myšlenkou je nalézt řešení pro H tak, že k přesnému řešení pro H_0 přičteme korekci řádu ϵ započítávající perturbaci H_1 a korekci řádu ϵ^2 započítávající H_2 . Řešení perturbovaného systému s hamiltoniánem H se tedy hledá ve tvaru mocninné řady, kde jsou mocniny v ϵ . Formálně takovou řadu dosadíme jako řešení do Hamiltonových rovnic (3.5) skoro integrabilního systému a členy stejného řádu $O(\epsilon^n)$ dáme k sobě. Dostáváme tak rovnice tvaru

$$v_0(t) + \epsilon v_1(t) + \epsilon^2 v_2(t) + \dots = 0.$$

Aby taková rovnice platila, musí být výrazy $v_i(t)$ rovny nule. Z těchto podmínek lze alespoň teoreticky (čti numericky) dopočítat perturbované řešení.

Získaná mocninná řada reprezentující řešení systému s hamiltoniánem H nemusí obecně konvergovat pro některé počáteční podmínky. To znamená, že ačkoliv H je perturbací H_0 , není pravda, že řešení systému s hamiltoniánem H je pouze poruchou řešení systému s hamiltoniánem H_0 . Jde o fundamentálně odlišnou trajektorii, která může již vykazovat chaotické chování. V případě, že pro danou počáteční podmínku je řešení systému s hamiltoniánem H pouze poruchou řešení systému s hamiltoniánem H_0 tj. pro danou počáteční podmínku naše mocninná řada konverguje, mluvíme o *stabilní trajektorii*.

Například Země obíhající kolem Slunce je problém dvou těles, který lze explicitně vyřešit. Jedná se o integrabilní systém. Ve skutečnosti je však třeba uvažovat perturbace způsobené gravitačním působením okolních planet. Pokud je Země na takové stabilní trajektorii, bude navždy obíhat kolem Slunce.

Nabízí se přirozená otázka, které trajektorie jsou stabilní? Jak je poznáme a jak se situace mění se zvětšujícím se pertubačním parametrem ϵ ?

Odpověď na předchozí otázky dává následující slavné tvrzení ([6], [7]).

KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)

Za předpokladu splnění podmínky nedegenerovanosti

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial F_i \partial F_j} \right) = \det \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial F_j} \right) \neq 0$$

a malého pertubačního paramteru ϵ platí:

- většina trajektorií původního systému H_0 s frekvencemi ω_i zůstane zachována, pouze budou deformovány a to tak, že tyto trajektorie jsou kvalitativně stále trajektorie na toru T^n ,
- konkrétně trajektorie původního systému H_0 s frekvencemi ω_i bude zachována, pokud splňuje podmínku

$$|\vec{\omega} \cdot \vec{k}| > \gamma |k|^{-\tau}, \text{ pro každé } \mathbf{0} \neq \vec{k} \in \mathcal{Z}^n,$$

kde $\gamma > 0$, $\tau > n - 1$ a n je počet stupňů volnosti,

- pokud $\epsilon \rightarrow 0$, pak míra doplňku k množině stabilních trajektorií z prvního bodu jde k nule a to alespoň tak rychle jako $\sqrt{\epsilon}$.

Nepřekvapující výsledek:

Předchozí tvrzení není překvapující tím, že pokud existuje ve fázovém prostoru (θ_i, F_i) původního systému H_0 trajektorie s frekvencemi ω_i , pak pro malou pertubaci ϵ je skoro jisté, že v blízkosti této trajektorie bude trajektorie pertubovaného systému se stejnou sadou frekvencí ω_i . To zajišťuje podmínka nedegenerovanosti.

Překvapující výsledek:

Je překvapivé, že většina trajektorií pertubovaného systému budou opět kvalitativně trajektorie na toru T^n , ačkoliv pertubovaný hamiltonián vůbec nesplňuje klíčovou podmínku 2) z definice integrabilního systému. Ta totiž, jak víme, zaručuje, že trajektorie leží na toru.

Tento výsledek lze nahlédnout následující úvahou. Pokusíme se nalézt nové kanonické souřadnice $(\tilde{\theta}_i, \tilde{F}_i)$, ve kterých bude platit $H = H(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n)$. V takovém případě bude náš pertubovaný systém integrabilní a tudíž jeho trajektorie leží na toru. Hledání takové kanonické změny souřadnic převedeme

na hledání následující generující funkce S , která zohledňuje poruchy ϵ různých řádů započtením členu S_1 obdobně jako v (3.4)

$$S(\theta_i, \tilde{F}_i) = \theta \cdot \tilde{F} + \epsilon S_1(\theta_i, \tilde{F}_i),$$

kde

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_i &= \frac{\partial}{\partial \tilde{F}_i} S(\theta_1, \dots, \theta_n, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n), \\ F_i &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} S(\theta_1, \dots, \theta_n, \tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n).\end{aligned}$$

Pokud zvolíme $\epsilon = 0$, měla by být změna souřadnic identitou. To opravdu je, protože pak platí $S(\theta_i, \tilde{F}_i) = \theta \cdot \tilde{F}$.

Úhly θ_i jsou 2π periodické souřadnice, můžeme proto pro poruchové členy H_1 a S_1 provést rozvoj do Fourierovy řady v proměnných θ_i

$$H_1(\theta_i, F_i) = \sum_m H_{1m}(F_i) e^{im\theta}, \quad S_1(\theta_i, \tilde{F}_i) = \sum_m S_{1m}(\tilde{F}_i) e^{im\theta}.$$

Využitím vztahu pro hamiltonián ve starých a nových souřadnicích

$$H(\theta_1, \dots, \theta_n, \frac{\partial S}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial \theta_n}) = H(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n)$$

dostáváme

$$H_0(\tilde{F}_i + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i}) + \epsilon H_1(\theta_i, \tilde{F}_i + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i}) = H(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n).$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj v poruše ϵ (do prvního řádu)

$$\begin{aligned}H_0(\tilde{F}_i) + \epsilon \omega(\tilde{F}_i) \nabla_{\theta} S_1(\theta_i, \tilde{F}_i) + \epsilon H_1(\theta_i, \tilde{F}_i) + O(\epsilon^2) \\ = \\ H(\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n),\end{aligned}$$

kde ovšem H_0 je stále vyjádřena v souřadnicích (θ_i, F_i) a došlo pouze k číselnému dosazení konkrétních hodnot $F_i := \tilde{F}_i$. Proto

$$\omega(\tilde{F}_i) \equiv \nabla_F H_0|_{F_i = \tilde{F}_i}$$

je opravdu vektor frekvencí nepertubovaného systému.

Porovnáním členů řádu ϵ^* máme

$$\omega(\tilde{F}_i) \nabla_{\theta} S_1(\theta_i, \tilde{F}_i) = -H_1(\theta_i, \tilde{F}_i) + O(\epsilon^2).$$

*člen $O(\epsilon^2)$ je také řádu ϵ

a konečně použitím Fourierových rozvojevů pro poruchové členy H_1 a S_1 získáme

$$S(\theta_i, \tilde{F}_i) = \theta \cdot \tilde{F} + i\epsilon \sum_{m \neq 0} \frac{H_{1m}(\tilde{F}_i)}{m \cdot \omega(\tilde{F}_i)} e^{im\theta} + O(\epsilon^2), \quad (3.6)$$

kde $m = (m_1, \dots, m_n)$ je vektor celých čísel. Odtud je zřejmé, že problém integrability pertubovaného systému je převeden na konvergenci předchozí řady.

Z řady (3.6) je snadno vidět, že

Resonanční trajektorie nepertubovaného systému tj. takové, že platí

$$m \cdot \omega(F_i) = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n = 0$$

pro nějaký celočíselný vektor m , "nepřežijí" žádnou pertubaci. Každá, byť libovolně malá, pertubace zruší resonující trajektorie.

Technické poznámky:

- Aby platilo tvrzení KAM, musí být hamiltonián H alespoň třídy C^3 (viz. [7]). Pokud je pouze třídy $C^{3-\delta}$ jsou známy protipříklady.
- Jak malá musí být porucha ϵ , aby platilo tvrzení KAM? Je známo, že velikost této poruchy závisí na počtu stupňů volnosti n jako $n!^{-\alpha}$ pro nějaké $\alpha > 0$.
- Stabilní trajektorie původního systému H_0 s frekvencemi ω_i se často označují jako invariantní torus nebo dokonce *invariantní KAM torus*. To souvisí s tím, že jednak omezené trajektorie integrabilního systému leží na toru a jednak podle podmínky předchozího tvrzení mohou "přežít" pouze trajektorie s nesoudělnými frekvencemi a tyto vyplňují celý torus.
- Podmínka nedegenerovanosti je tzv. Kolmogorova podmínka nedegenerovanosti. Postačující podmínky pro její splnění v blízkosti singularit lze nalézt v [14]. Zde se také tvrdí, že pokud platí Kolmogorova podmínka v blízkosti nějakého toru, pak platí v blízkosti každého toru, který lze dosáhnout cestou složenou pouze z torů.

Výborný článek, který srozumitelně diskutuje KAM teorém a také případ "lower dimensional" toru, je článek [6].

Matematické pozadí pertubační teorie včetně mnoha příkladů a důkazů lze nalézt v textu [8].

4 Topologická struktura fázového prostoru

V této kapitole uvidíme, že fázový prostor má přirozenou strukturu (topologii), jenž je dána fyzikou, která se v něm odehrává. Hlavním cílem je pak poukázat na *invarianty* topologie fázového prostoru. Tyto invarianty totiž představují úplnou strukturní charakterizaci fyzikálních systémů. Existují pouze tři druhy invariantů: *struktura nedegenerovaných singularit*, *globální monodromie a singulární Chernovy třídy* (viz. [13]).

Fyzikální systémy tedy mají invarianty strukturální povahy, které se zachovávají při změně souřadnic. Naším cílem je studovat monodromii.

4.1 Základní pojmy

Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ nazveme *homeomorfismem*, pokud f je spojitá bijekce a zároveň $f^{-1} : Y \rightarrow X$ je spojitě zobrazení.

Pokud existuje homeomorfismus mezi X a Y , pak říkáme, že tyto prostory jsou *topologicky ekvivalentní*. Pod topologickým prostorem X a Y si můžeme představit jakoukoliv množinu, například válec, torus.

Můžeme tedy zavést důležitou ekvivalenci, která ztotožňuje homeomorfní množiny. Tím rozdělíme myšlenkově všechny množiny do skupin a každou skupinu můžeme reprezentovat jediným zástupcem.

Homeomorfismus si lze zjednodušeně představit jako kombinaci spojitě deformace, která zachovává dimenzi (čtverec nelze homeomorfně deformovat úsečkou), se stříháním a zpětným lepením rozstříhnutých částí.*

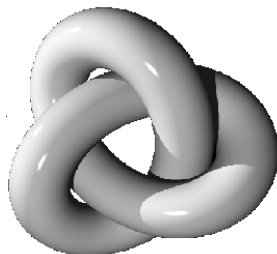
Použitím těchto pravidel je snadné ověřit, že hrnek s "uchem" je homeomorfní toru T^2 . Stačí vytáhnout pouze vnitřní část dna hrníčku a pak pouze dodeformovat na torus. To je názorně ilustrováno na obrázku 5.



Obrázek 5: Hrnec je homeomorfní s torem

*nazývá se *pokryvací dimenze* a odpovídá intuici, je definována jako nejmenší n takové, že každé pokrytí otevřenými množinami má zjemnění (opět pokrytí ot. množinami), kde žádný bod neleží v průniku více než $n + 1$ množin

Stříhání a zpětné lepení lze snadno ukázat na trojlístkovém uzlu (obrázek 6), který je homeomorfní s torem T^2 . Stačí provést rozstřížení, rozmotání a opětovné slepení rozstřížených konců.

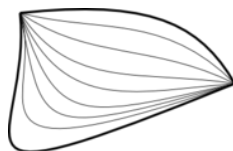


Obrázek 6: Trojlístkový uzel

Občas nemusí být vhodné ztotožnit uzel, který lze rozplést bez stříhání s uzlem, který nelze jinak rozmotat. K tomuto účelu slouží pojem *isotopie*, která je pouze spojitou deformací. Podrobnosti lze nalézt pod klíčovým názvem odpovídající teorie - *knot theory*.

Pokud by navíc pro homeomorfismus f měla zobrazení f a f^{-1} spojitě parciální derivace, pak se f nazývá *difeomorfismus*.

Dvě funkce (cesty) f, g z topologického prostoru X do Y jsou *homotopicky ekvivalentní* resp. stejného *homotopického typu*, jestliže lze první cestu spojitě deformovat na druhou - existuje spojitá funkce $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ taková, že $H(x, 0) = f(x)$ a $H(x, 1) = g(x)$.



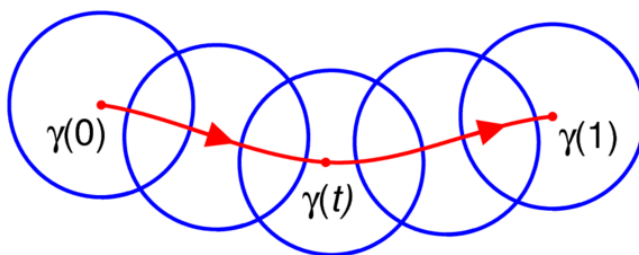
Obrázek 7: Homotopicky ekvivalentní cesty

Dalším důležitým pojmem je *fibrováný prostor*. Fibrováním prostorem se rozumí (E, π, B) nebo někdy zkráceně $\pi : E \rightarrow B$, kde π je spojitě zobrazení na bázevým prostoru B a množiny $\pi^{-1}(b)$ se nazývají *fibry* nad b . Můžeme si představit, že fibrováný prostor je tvořen fibry $\pi^{-1}(b)$, které jsou parametrizované bázevým prostorem B a slepeny topologií prostoru E . Dva fibrové prostory nazveme topologicky ekvivalentní, jestliže existuje homeomorfismus, který zobrazuje fibr jednoho prostoru na fibr druhého prostoru. V klasické mechanice si můžeme představit $E = \mathcal{M}^{2n}$ jako fázový prostor a bázevým prostoru $B \subseteq \mathbb{R}^n$ jako obor hodnot zobrazení (F_1, \dots, F_n) tj. množina hodnot n -tic invariantů pohybu.

4.2 Monodromie

V této kapitole zavedeme monodromii pomocí abstraktních nástrojů, které jsme definovali dříve a uvidíme několik zásadních vlastností.

Uvažujme $\pi : E \rightarrow B$ lokálně triviální fibrovaný prostor* a $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ cestu v B z počátečního bodu $a = \gamma(0)$ do koncového bodu $b = \gamma(1)$. Lokální triviálnost nám zaručí, že pro každý bod cesty $\gamma(t)$ existuje okolí U takové, že $\pi^{-1}(U)$ vypadá† jako $U \times F$, kde fiber $F = \pi^{-1}(\gamma(t))$.



Obrázek 8: Lokálně triviální části cesty γ v B

Pokud označíme průnik dvou sousedních okolí na obrázku 8 jako V , potom platí, že $\pi^{-1}(V) \rightarrow V$ je topologicky ekvivalentní $V \times F_1 \rightarrow V$ a zároveň $V \times F_2 \rightarrow V$ tj. $V \times F_1 \rightarrow V$ je topologicky ekvivalentní $V \times F_2 \rightarrow V$. Podle definice topologické ekvivalence pro fibrované prostory se musí homomorfálně zobrazovat fibry na fibry. A tedy pokud označíme středy uvažovaných okolí $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$, existuje homeomorfismus mezi fibry $F_1 = \pi^{-1}(\gamma(t_1)) \leftrightarrow \pi^{-1}(\gamma(t_2)) = F_2$. Tímto způsobem můžeme pokračovat přes všechny průniky až nakonec dostáváme, že existuje transformace T_γ

$$T_\gamma : \pi^{-1}(a) \leftrightarrow \pi^{-1}(b),$$

což je homeomorfismus mezi počátečním fibrem $\pi^{-1}(a)$ a koncovým $\pi^{-1}(b)$. Pokud nyní zaměníme γ za homotopicky ekvivalentní cestu, zřejmě se zachová homotopický typ transformace T_γ . Volně řečeno, typ monodromie nezávisí na volbě cesty mezi body a a b . Speciálně pokud je γ uzavřená smyčka, nezávisí typ ani na volbě počátečního (koncového) bodu. V tomto případě se T_γ nazývá *monodromní transformace* a tedy

$$T_\gamma : \pi^{-1}(a) \leftrightarrow \pi^{-1}(a).$$

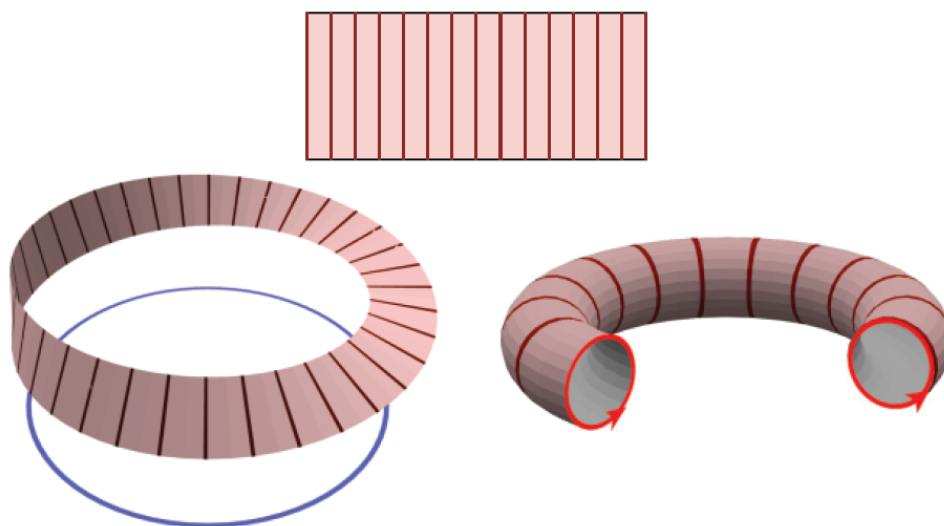
*v případě integrabilních systémů si můžeme představit $E = \mathcal{M}^{2n}$ a bazový prostor $B \subseteq \mathbb{R}^n$ jako obor hodnot invariantů pohybu (F_1, \dots, F_n)

†v řeči pojmů předchozí kapitoly jde o homeomorfismus $\pi^{-1}(U) \leftrightarrow U \times F$, který zobrazuje fibr na fibr tj. jde o topologicky ekvivalentní množiny se stejnou strukturou fibrů

Idea: T_γ "vezme" oba koncové fibry $\pi^{-1}(a)$ struktury $\gamma([0, 1]) \times \pi^{-1}(a)$ a proplete je dohromady. Způsob propletení je pak typ monodromie:

- Pokud zvolíme dvě cesty γ_1 a γ_2 , které lze na sebe spojitě deformovat, zůstane typ monodromie stejný.
- Pokud zvolíme dvě různé cesty, z nichž jedna obíhá kolem singularity nebo "díry" a druhá nikoliv, pak nelze spojitě deformovat první cestu na druhou a tudíž způsob propletení tj. typ monodromie je nutně jiný.

Například pokud máme Möbiův proužek $\pi : E \rightarrow S^1$ (obrázek 9), pak každý fibr $\pi^{-1}(a)$ je interval I a lokálně nelze rozlišit mezi válcem $S^1 \times I$ a Möbiovým proužkem. Pokud máme proužek $[0, 1] \times I$, pak monodromní transformace může zapůsobit triviálně tj. ztotožněním koncových intervalů. Výsledkem je válec $S^1 \times I$. Nebo může zapůsobit "otočením" a výsledkem je Möbiův proužek.



Obrázek 9: Möbiův proužek fibrovaný intervaly I

Protože v integrabilních systémech jsou fibry toru T^n , působí monodromní transformace na $[0, 1] \times T^n$, kde proplétá koncové toru T^n . To si lze představit pouze pro případ $n = 1$ tj. $T^1 = S^1$. Jak ukazuje obrázek 9, buď monodromie zapůsobí triviálně a vznikne torus T^2 nebo zapůsobí "otočením" koncových fibrů S^1 a vznikne Kleinova lahev.

5 Monodromie v klasické mechanice

Na úplném začátku je třeba říci, že v této kapitole budou uvedeny pouze nejzákladnější poznatky, bez kterých však nelze porozumět řadě současným článkům. V tomto směru považuji fyzikální článek [15] za výbornou doplňující literaturu. Ten je především velmi srozumitelný, což bohužel v době, kdy píše tuto práci, neplatí u většiny ostatních textů. Ve zmíněném článku se lze dočíst o praktickém zobecnění monodromie na frakční monodromii, nelokální monodromii a bidromii.

Pojem monodromie jsme abstraktně definovali v předchozí kapitole. Nyní se budeme zabývat jeho uplatněním v případě skoro integrabilních systémů klasické mechaniky. Nejprve však uvažujme integrabilní systémy. Potom monodromii můžeme vystihnout následovně.

Monodromii v klasické mechanice lze charakterizovat

- 1) jako překážku zabraňující globálnímu zavedení proměnných akce-úhly,
- 2) jako invariální vlastnost systému, která říká jak se změní souřadnice akce-úhly, když je umíme zavádět lokálně a chtěli bychom je rozšířit podél uzavřené smyčky, která se navrací zpět do původní oblasti,
- 3) přítomností trajektorií, které neleží na toru, ale na "pinched" toru.

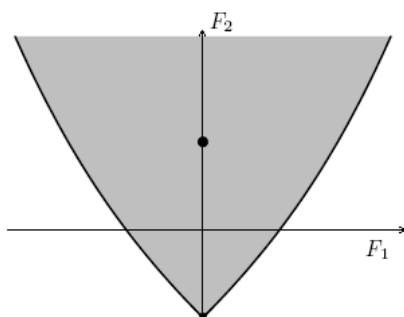
Z kapitoly o KAM teorému víme, že malou pertubaci systému "přežije" většina torů. V článku [22] bylo demonstrováno, že malou pertubaci "přežije" i monodromie. To je velice důležité pro fyzikální aplikace. Pokud máme tedy pertubovaný systém $H = H_0 + \epsilon H_1$, stačí monodromii zkoumat na integra-bilní části H_0 .

5.1 Bifurkační diagram \mathcal{EM} zobrazení

Protože monodromie "přežije" malou perturbaci integrabilního systému, chápeme monodromie jako vlastnost skoro integrabilních systémů. A proto stačí zkoumat pouze integrabilní část skoro integrabilního systému. K tomu se využívá konceptu \mathcal{EM} zobrazení ("energy-momentum map"*). V případě systémů s n stupni volnosti máme invarianty pohybu F_1, \dots, F_n a \mathcal{EM} zobrazení je definováno takto

$$\mathcal{EM} = (F_1, \dots, F_n) : \mathcal{M}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Nyní zavedeme několik důležitých pojmů, které budeme často používat.



Obrázek 10: Obor hodnot \mathcal{EM} zobrazení s jedním singulárním bodem

Bod $m \in \mathcal{M}^{2n}$ je *regulární*, jestliže ∇F_i jsou v m lineárně nezávislé. V opačném případě říkáme, že m je *singulární*. Je-li bod m singulární, pak zřejmě platí $\text{rank } d\mathcal{EM}(m) < n$. Speciálně pokud $\text{rank } d\mathcal{EM}(m) = 0$, je m označován jako *pevný bod*.

Pro dané $c \in \mathbb{R}^n$ se množina $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ nazývá *fiber* nebo *list*. Je zřejmé, že fibr $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ je sjednocením souvislých komponent, kde *komponentou* se rozumí každá maximální souvislá podmnožina. Konkrétní komponentu budeme označovat N_c . Často se také rozumí fiberem přímo komponenta množiny $\mathcal{EM}^{-1}(c)$. Proto budeme na důležitých místech používat spíše slovo komponenta, které nepovede k nedorozumění.

Hodnota $c \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *regulární*, jestliže všechny body $m \in \mathcal{EM}^{-1}(c)$ jsou regulární. V tomto případě je fibr $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ nazýván *regulárním*, jinak *singulárním*. Velmi důležitou definicí je

$$\text{rank } N_c = \min_{m \in N_c} \text{rank } d\mathcal{EM}(m).$$

A $n - \text{rank } N_c$ se nazývá *kodimenze* množiny N_c .

*toto zobrazení nese název podle situace, kdy $F_1 = H, F_2 = L$

Nyní můžeme přistoupit k zavedení *bifurkačního diagramu*. Bifurkačním diagramem rozumíme množinu

$$\Sigma = \{c \in \mathbb{R}^n; \exists m \in \mathcal{EM}(c), \text{rank } d\mathcal{EM}(m) < n\}.$$

Bifurkační diagram odráží změnu v kvalitativních vlastnostech trajektorií pro různé hodnot invariantů pohybu. Částečně dává informaci o samotné fibrové struktuře \mathcal{EM} zobrazení, kterou chceme studovat.

Speciálně hranice oboru hodnot \mathcal{EM} zobrazení je tvořena singulárními body. Proto se často díváme na bifurkační diagram jako na obor hodnot \mathcal{EM} zobrazení, kde jsou zvýrazněny neregulární body.

5.2 Topologie fibrů

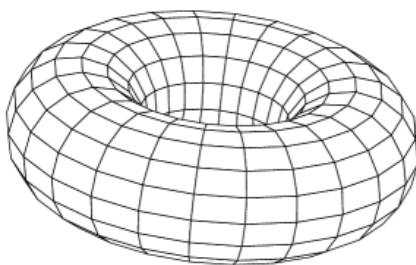
5.2.1 Regulární fibr

Regulární případ lze charakterizovat dvěma základními vlastnostmi.

a) Topologie regulárního fibr $\mathcal{EM}^{-1}(c)$

- Množina $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ je sjednocením souvislých komponent, které mají dimenzi n^* . Komponentou se rozumí maximální souvislá množina.
- Podle Arnold-Jost teoremu je každá taková komponenta topologicky ekvivalentní $T^k \times R^{n-k}$, pro nějaké $0 \leq k \leq n$. Speciálně pokud je komponenta omezená,[†] jde o torus T^n .

Protože podmínka na omezenost je u mnoha fyzikálních případů splněna, jsou často komponenty regulárního fibr $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ právě tory T^n .



Obrázek 11: Torus - regulární fibr $\mathcal{EM}^{-1}(c)$

Myšlenka důkazu druhého bodu je relativně jednoduchá. Označme komponentu $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ jako N_c a předpokládejme, že je omezená. Na této množině můžeme zavést n tečných vektorových polí $X_{F_i} = \mathbb{J} \cdot \nabla F_i$, které (stejně jako Hamilt. pole $X_H = \mathbb{J} \cdot \nabla H$ viz. (2.4)) určují tok ϕ_{F_i} na N_c , kde \mathbb{J} je symplektická matice (kap. 2). Ačkoliv ϕ_{F_i} nemusí být obecně periodický, dokážeme nalézt $t \in \mathbb{R}^n$ tak, že složení $\phi^t \equiv \phi_{F_n}^{t_n} \circ \dots \circ \phi_{F_1}^{t_1}$ je periodický tok tj. $\phi^t P = P$ pro každé $P \in N_c$. To plyne z omezenosti a uzavřenosti N_c . Navíc díky nezávislosti polí X_{F_i} je takových t právě n . A tedy $N_c = S^1 \times \dots \times S^1 = T^n$. Srovnej s kružnicemi na obrázku 11. Ty odpovídají tokům daných akcemi I_i .

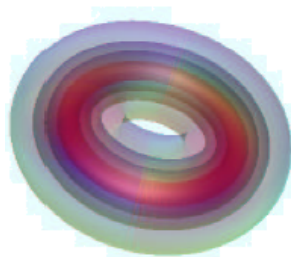
Podrobnější popis důkazu lze nalézt v kapitole Matematické poznámky.

*v $2n$ dim. fázovém prostoru máme n podmínek $F_j(q_i, p_i) = c_j$, přičemž ∇F_j jsou lineárně nezávislé, nyní stačí využít větu o implicitních funkcích nebo geometrický význam gradientu ∇F_j jako normály k ekviploše $F_j(q_i, p_i) = c_j$

[†]formálně je nutná kompaktnost, ale v R^m je to totéž co omezenost a uzavřenost, přičemž uzavřenost komponenty $\mathcal{EM}^{-1}(c)$ máme zajištěnu ze spojitosti \mathcal{EM}

b) Topologie fibrů $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}$ v blízkosti regulárního bodu c

- V malém okolí regulárního bodu c jsou opět regulární body a tudíž je lze klasifikovat podle a).
- Pokud označíme malé okolí bodu c jako D^n , pak z Liouville-Arnoldova teorému plyne, že pro každou omezenou a souvislou komponentu $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(D^n)$ lze provést kanonickou transformaci souřadnic pomocí proměnných akce-úhly (I_i, θ_i) tak, že komponenta má tvar $D^n \times T^n$.



Obrázek 12: V blízkosti toru jsou opět tory

Předně je zřejmé, že v blízkosti regulárního bodu c jsou opět pouze regulární body. To plyne z toho, že pro každé $m \in \mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(c)$ jsou ∇F_j nezávislá a tedy existuje n proměnných, které bez újmy na obecnosti můžeme označit jako q_1, \dots, q_n a které splňují

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial q_n} \end{vmatrix} > 0.$$

Nyní stačí využít spojitosti determinantu jako zobrazení z (q_i, p_i) do \mathbb{R} a spojitosti invariantů pohybu F_1, \dots, F_n .

Dále z kapitoly 3.2 víme, že pro integrabilní systémy umíme alespoň lokálně, v regulárních bodech, zavést akce-úhly. Zbytek plyne z bodu a).

5.2.2 Singulární fibr

Obecné výsledky byly dosaženy především pro případ takzvaných nedegenerovaných* singularit. To však příliš nevdí, protože experimentálním faktem je skutečnost, že množství singularit reálných systémů je nedegenerovaných. Nedegenerované singularity umožňují elegantně nahradit \mathcal{EM} zobrazení jeho aproximací do druhého řádu. Této aproximaci se říká *lineární model*, jde totiž o linearizaci vektorových polí X_{F_i} . Nyní vše přesněji popíšeme.

Mějme libovolný singulární bod m tj. $\text{rank } d\mathcal{EM}(m) = k < n$. Můžeme předpokládat, že $\nabla F_1(m), \dots, \nabla F_k(m)$ jsou lineárně nezávislé, jinak bychom vhodně přečíslovali invarianty pohybu. A tedy

$$\nabla F_{k+1}(m) = \dots = \nabla F_n(m) = 0.$$

Navíc můžeme změnit invarianty pohybu o konstantu tak, aby $\mathcal{EM}(m) = 0$. Aproximujme invarianty F_{k+1}, \dots, F_n jejich kvadratickými členy z Taylorova rozvoje. Williamson ukázal, že v případě nedegenerovaných singularit existují kanonické souřadnice (q_i, p_i) tak, že lze kvadratické členy našich invariantů pohybu vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí f_{k+1}, \dots, f_n tj. $(f_{k+1}, \dots, f_n) = A \circ (F_{k+1}, \dots, F_n)$, kde A je regulární matice. Proto

$$\mathcal{EM} = (F_1, \dots, F_k, f_{k+1}, \dots, f_n) : \mathcal{M}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

kde f_{k+1}, \dots, f_n mají podle Williamsona tvar

	Typ invariantu
$f_{k+i} = q_i^2 + p_i^2$	$1 \leq i \leq k_e$, (eliptický)
$f_{k+i} = q_i p_i$	$k_e + 1 \leq i \leq k_e + k_h$, (hyperbolický)
$\begin{cases} f_{k+i} = q_i p_{i+1} - q_{i+1} p_i \\ f_{k+i+1} = q_i p_i + q_{i+1} p_{i+1} \end{cases}$	$i = k_e + k_h + 2j - 1$, $1 \leq j \leq k_f$. (focus-focus pár)

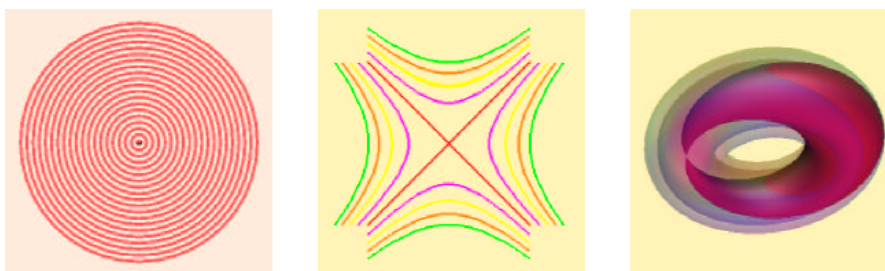
Je vidět, že platí $k_e + k_h + 2k_f = n - k$. Eliptické a hyperbolické invarianty můžeme chápat jako invarianty systému s 1 stupněm volnosti, protože závisí pouze na dvou parametrech q_i, p_i . Focus-focus pár je dvojice invariantů náležící systému se 2 stupni volnosti.

Trojice (k_e, k_h, k_f) se nazývá *Williamsonův typ* nedegenerované singularity m . Navíc všechny nedegenerované singularity ze stejné komponenty N_c , které mají stejnou dimenzi $\text{rank } d\mathcal{EM}(m)$, jsou téhož typu (k_e, k_h, k_f) . Pro podrobnosti odkazují na článek [18].

*definici uvedeme na dalších stranách této kapitoly

Okolí každé nedegenerované singularity typu (k_e, k_h, k_f) lze lokálně popsat pomocí k_e eliptických, k_h hyperbolických, k_f focus-focus a k regulárních invariantů. Navíc je zřejmé, že eliptické invarianty zastupují eliptickou singularitu, což je stabilní pevný bod a hyperbolické invarianty zastupují hyperbolickou singularitu, což je nestabilní pevný bod.

Focus-focus případ rozebereme později. Už teď ovšem předešleme, že singulárním fibrem je takzvaný "pinched" torus na obrázku 14 a singulárním bodem m je bod jeho zúžení. V blízkém okolí pinched toru jsou vždy tory.



Obrázek 13: Okolí eliptické, hyperbolické a focus-focus singularity

Eliasson ukázal, že opravdu v blízkosti nedegenerované singularity m je původní systém schodný s naší aproximací. Přesněji řečeno, okolí bodu m původního systému je homeomorfní (dokonce difeomorfní) s odpovídajícím okolím aproximace.

Každé dva Williamsonovy invarianty* jsou tvořeny různými proměnnými. Navíc pro každou pevnou volbu těchto $n - k$ proměnných v blízkosti m jsou F_1, \dots, F_k regulární invarianty k proměnných a tudíž podle předchozí kapitoly vytvářejí regulární fiber dimenze k .

Proto si můžeme představit, že **blízké okolí bodu m je kartézský součin okolí bodu m z obrázků 12 a 13**, přičemž jejich zastoupení jsou dána čísla k_e, k_h, k_f, k . Je třeba upozornit, že u focus-focus singularity jde pouze o blízké okolí bodu zúžení a obdobně u regulární části jde o nějaké okolí na toru T^k .

Abychom mohli říci něco o tvaru singulárního fibru, není obecně možné uvažovat pouze lokální strukturu v blízkosti singularity. Jak však uvidíme u focus-focus fibru, u izolovaných singulárních bodů bude lokální informace stačit. Je překvapivé, že pro nelokální strukturu fibru platí obdobná, ovšem nelokální, tvrzení o kartézském součinu. Momentálně nejobecnějších výsledků v tomto směru dosáhla dvojice Miranda a Zung viz. [16],[17] a [19].

*focus-focus pár počítáme jako jeden

Co je tedy přesně nedegenerovaný singulární bod? Pojem nedegenerované singularity se standardně zavádí pomocí pojmu nedegenerovaného pevného bodu a redukce systému. Pevný bod $m \in \mathcal{M}^{2n}$ nazveme *nedegenerovaným*, jestliže skoro všechny lineární kombinace matic druhých parciálních derivací

$$d^2 F_1(m), \dots, d^2 F_n(m)$$

řádu $2n \times 2n$ dávají $2n$ různých vlastních čísel.

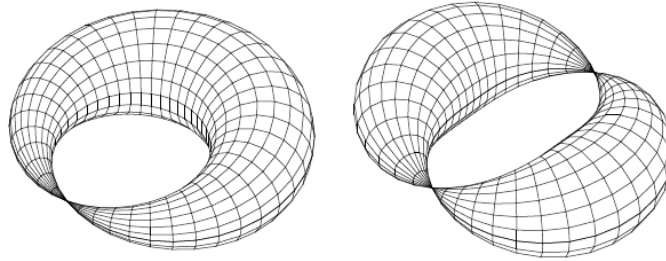
Předchozí definici lze ekvivaletně nahlížet jako linearizaci vektorových polí X_{F_i} s uvedenou podmínkou na vlastní čísla. Tu lze ve kvantové fyzice interpretovat jako podmínku na nedegenerované hladiny.

Mějme nyní singulární bod m , pro který $\text{rank } d\mathcal{E}\mathcal{M}(m) = k > 0$. Opět předpokládejme, že $\nabla F_1(m), \dots, \nabla F_k(m)$ jsou lineárně nezávislé a uvažujme systém s $n - k$ invarianty pohybu F_{k+1}, \dots, F_n , ke kterým navíc přidáme podmínky

$$F_1(q_i, p_i) = c_1, \dots, F_k(q_i, p_i) = c_k$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}^k$. Tím získáme systém s $n - k$ stupni volnosti a $n - k$ invarianty pohybu F_{k+1}, \dots, F_n . Pokud je pro každé $c \in \mathbb{R}^k$ v takto redukováném systému bod m nedegenerovaným pevným bodem, pak říkáme, že m je *nedegenerovaná singularita*.

Nyní se pokusím stručně nastínit, proč je právě pinched torus singulárním fibrem modelu focus-focus invariantů. Podrobnosti lze nalézt v [21].



Obrázek 14: Vlevo "pinched" torus, vpravo "double pinched" torus

Předně víme, že focus-focus pár si můžeme představit jako systém se 2 stupni volnosti tj. máme 4–dimenzionální fázový prostor. Přičemž tento systém je modelem, který v blízkosti focus-focus singulárního bodu m aproximuje nějaký systém $\mathcal{E}\mathcal{M}$ se dvěma stupni volnosti. V původním systému $\mathcal{E}\mathcal{M}$ označme N_c souvislou komponentu, která obsahuje nedegenerovanou singularitu m . V dalším budeme předpokládat, že N_c je omezená a tudíž kompaktní komponenta fibru $\mathcal{E}\mathcal{M}^{-1}(c)$. Také budeme pro jednoduchost předpokládat, že

původní systém má pouze jeden focus-focus singulární bod m . Jinak bychom provedli obdobné úvahy a výsledkem by byl torus, který má tolik bodů zúžení, kolik má singulárních bodů. Nyní chceme zkoumat tvar komponenty N_c .

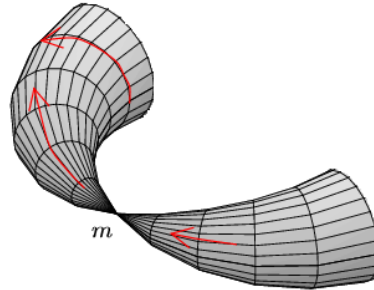
V aproximujícím modelu je nedegenerovaným singulárním bodem počátek souřadnic. Označme $\mathcal{F} = (f_1, f_2) = (q_1p_2 - q_2p_1, q_1p_1 + q_2p_2)$ pro kvadratické členy \mathcal{EM} zobrazení. Z tvaru funkcí lze snadno odvodit, že fibry $\mathcal{F}^{-1}(c)$ jsou regulární kromě případu $\mathcal{F}^{-1}(0)$, kdy fibr obsahuje počátek souřadnic. To také znamená, že singulární bod m je izolovaný v původním systému tj. v jeho blízkém okolí jsou pouze regulární body. A tedy každá omezená komponenta obsahuje konečně mnoho focus-focus singulárních bodů.

V blízkosti singulárního bodu m můžeme vektorová pole původního systému odhadnout vektorovými poli aproximací f_1, f_2 v počátku souřadnic, tj. linearizovat vektorová pole původního systému

$$X_{f_1} = \mathbb{J} \cdot \nabla f_1 = (-q_2, q_1, -p_2, p_1),$$

$$X_{f_2} = \mathbb{J} \cdot \nabla f_2 = (q_1, q_2, -p_1, -p_2).$$

Nyní lze snadno ověřit, že první pole vytváří periodické orbity kolem počátku souřadnic a druhé pole divergentní orbity z počátku souřadnic. Je dobré si povšimnout, že pole X_{f_1} a X_{f_2} jsou na sebe kolmá. Důsledkem předchozích pozorování má komponenta N_c v blízkosti bodu m tvar, který je znázorněn na obrázku 15.



Obrázek 15: Singulární fibr v blízkosti focus-focus singulárního bodu m

A tedy $N_c \setminus \{m\}$ se skládá maximálně ze dvou souvislých částí, které odpovídají stabilní a nestabilní varietě bodu m . Tyto variety jsou evidentně dány divergentním polem X_{f_2} , protože tokem od pole X_{f_1} se nelze dostat do počátku souřadnic. Pokud ukážeme, že stabilní a nestabilní varieta se shodují, bude zřejmé N_c homeomorfní pinched toru.

Shodnost lze snadno nahlédnout následující úvahou. Na nestabilní varietě vezmeme uzavřené okolí U bodu m , které je invariantní vůči periodickému

toku pole X_{f_1} . Zvolíme si libovolný bod z této množiny a díky toku daného polem X_{f_1} opustíme v konečném čase množinu U . Protože však $N_c \setminus U$ i s hranicí je také kompaktní, musí se po konečném čase tok pole X_{f_1} vrátit po stabilní varietě opět do množiny U . A tedy stabilní a nestabilní variaty bodu m jsou navzájem propojeny a tudíž jsou stejné.

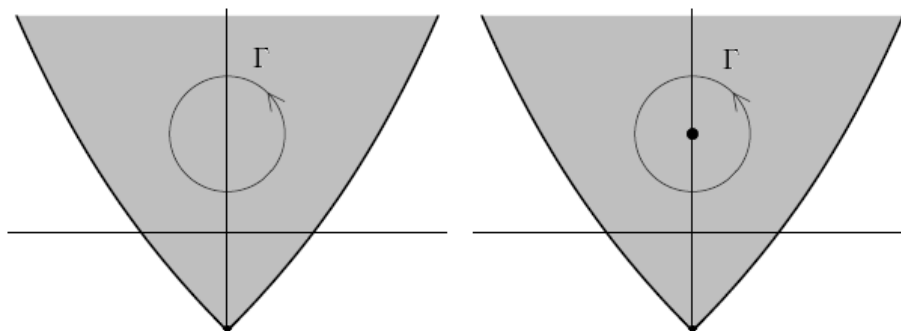
K získání dalších informací doporučuji články [18] a [19]. Podrobnější popis focus-focus singularity lze nalézt v [20].

5.3 Klasická monodromie

Klasickou monodromii jako nejjednodušší překážku k zavedení proměnných akce-úhly formuloval Duistermaat. Tato překážka je způsobena přítomností izolované množiny singulárních bodů v oboru hodnot \mathcal{EM} zobrazení, přičemž dimenze této množiny se předpokládá nejvýše $n - 2$.

Pro další popis využijeme označení \mathcal{R}_{reg} pro regulární body v oboru hodnot \mathcal{EM} zobrazení. Než přistoupíme k popisu situace se singulárními body, budeme nejprve uvažovat případ bez singularit.

Mějme smyčku Γ , která leží celá v \mathcal{R}_{reg} a pro názornost uvažujme případ $n = 2$ (levá část obrázku 16). Zvolme si regulární bod $c_0 \in \Gamma$, který odpovídá nějakému toru $T_{c_0}^2$. Z kapitoly o regulárním fibru nebo z kapitoly o souřadnicích akce-úhly víme, že lokálně v okolí U toru $T_{c_0}^2$ můžeme zavést



Obrázek 16: Smyčka Γ vlevo bez singularity, vpravo obíhá singularity

proměnné akce-úhly. Protože zřejmě každý bod smyčky Γ je regulární, můžeme vyjít z bodu c_0 a postupně jak se pohybujeme podél smyčky Γ , tak hladce napojujeme lokálně zavádě souřadnice akce-úhly. Při návratu do původního bodu c_0 je však třeba ověřit, že souřadnice, s kterými jsme přišli do původního bodu, jsou stejné, jako když jsme začínali v c_0 . To lze nahlédnout například tak, že spojitě deformuje Γ do blízkosti nějakého bodu uvnitř smyčky. Daný bod je zřejmě regulární a tedy lze zavést na celé deformované smyčce proměnné akce-úhly. Protože deformace byla spojitá, platí tento závěr i pro původní smyčku Γ tj. zavedené počáteční a koncové souřadnice jsou shodné.

Situace se ovšem změní, pokud smyčka obíhá kolem nějaké singularity (pravá část obrázku 16). V takovém případě sice Γ leží v \mathcal{R}_{reg} , ale nelze ji deformovat do blízkosti bodu, kde se vyskytují pouze regulární body. Proto nelze zavést globální souřadnice akce-úhly na $\mathcal{EM}(\Gamma)$ a tedy ani na $\mathcal{EM}(\mathcal{R}_{\text{reg}})$. To ovšem znamená, že počáteční a koncové souřadnice v c_0 , které jsme získali průchodem smyčkou Γ , se liší. Jinými slovy, máme dvě různé báze "kružnic"

na stejném toru $T_{c_0}^2$. Přičemž od vyjádření bodu na $T_{c_0}^2$ v původních souřadnicích lze přejít k vyjádření v koncových souřadnicích pomocí monodromní transformace, což je *matice monodromie* M . Platí, že $M \in SL(n, \mathbb{Z})$ tj. M je matice řádu $n \times n$, která obsahuje pouze celá čísla a navíc $\det M = 1$. Je zřejmé, že volba báze, ve které je vyjádřena matice M je libovolná, proto může mít matice monodromie konjugovaný tvar AMA^{-1} , kde $A \in SL(n, \mathbb{Z})$.

Využitím znalostí z kapitoly 4.2 dostáváme, že klasická monodromie

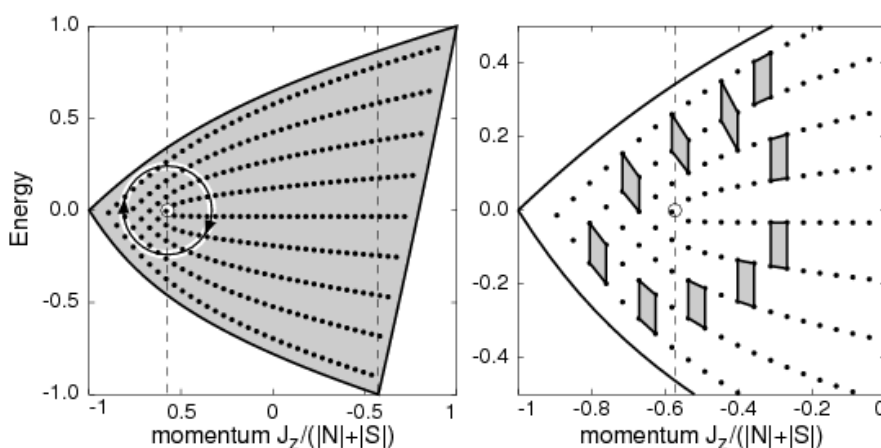
- nezávisí na volbě bodu c_0 ,
- nezávisí na volbě smyčky, kterou lze spojitě deformovat na Γ ,
- nezávisí na malé změně parametrů systému, které zachovávají integrabilitu a nezmění kvalitativní vlastnosti obrazu \mathcal{EM} zobrazení.

Je známo, že pro případ $n = 2$ je klasická monodromie způsobená přítomností pinched toru ve fázovém prostoru. Konkrétně se podařilo nalézt monodromii v tak elementárních systémech, jako je sférické kyvadlo nebo "Mexican hat" systém, který má hamiltonián $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2$. Oba systémy mají monodromii danou maticí $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Také byla nalezena monodromie v molekulárním systému H_2O , který se nachází ve slabém elektromagnetickém poli.

Ukazuje se, že velmi užitečným zobecněním monodromie je zobecnění na případ, kdy smyčka Γ prochází přes množinu singularit dimenze $n - 1$. Zobecnění monodromie pro různé systémy lze nalézt v [15].

6 Monodromie v kvantové mechanice

Monodromie v kvantové mechanice se projevuje jako bodová porucha v mřížce kvantových stavů. Což nedovoluje zavést globální kvantová čísla. Obdobně jako v klasické mechanice uvažujeme smyčku Γ a lokálně zavádíme proměnné akce-úhly, můžeme v kvantové mřížce uvažovat lokální zavedení kvantových čísel podél nějaké smyčky Γ . Pokud se při průchodu smyčkou vrátíme do původního kvantového stavu s odlišným popisem kvantových čísel, je v systému přítomna monodromie. To ilustruje obrázek 17, který byl převzat z [23].



Obrázek 17: Monodromie kvantového \mathcal{EM} zobrazení

7 Závěr

Pojem monodromie je založen na konceptu \mathcal{EM} zobrazení, které každému bodu fázového prostoru přiřadí n -tici konkrétních hodnot invariantů pohybu F_1, \dots, F_n tak, jak jsou zachovávány podél trajektorií. Můžeme si představit, že fázový prostor se rozpadá na části, kde se zachovávají předchozí invarianty pohybu. Monodromie potom říká, jakým způsobem jsou tyto invariantní množiny slepeny k sobě. Lokálně tato slepení mohou vypadat triviálně jako proužek papíru, ale v globálním měřítku nikoliv. Je rozdíl zda proužek papíru slepím tak, že vznikne válec nebo tak, že vznikne Möbiův list.

Monodromie je topologická vlastnost fázového prostoru, která existuje bez ohledu na volbu konkrétních souřadnic systému, třeba i nekanonických. Přesto nebo možná právě proto má monodromie důsledky na úrovni souřadnic. V klasické mechanice způsobí, že není možné globálně zavést proměnné akce-úhly. Tyto souřadnice lze vždy zavést alespoň lokálně v takzvaných integrabilních systémech. Ačkoliv je monodromie formálně zavedena pouze pro integrabilní systémy, bylo dokázáno, že se zachovává i při pertubaci systému. Proto je monodromie pojem, který patří do škatulky skoro integrabilních systémů.

V integrabilních systémech jsou invariantní množiny toru T^n . V singulárním případě je situace o něco komplikovanější. Často jsou ovšem singularity nede-generované a zde si lze představit každou invariantní množinu jako složení 3 typů objektů: stabilního pevného bodu, variety příslušející nestabilnímu pevnému bodu a pinched toru s daným počtem bodů zúžení. Monodromii lze pak odhalit přítomností pinched toru ve fázovém prostoru.

Protože jsou v současné době dostupné především matematické články, musel jsem nejprve nastudovat patřičný matematický aparát. Ačkoliv jde v podstatě o rešerši, je nutné zmínit, že většinu zde uvedených tvrzení a myšlenek jsem musel převést z řeči abstraktní matematiky o několik poschodí níže. Snad do trochu srozumitelnější matematiky. Také se mi nepodařilo nalézt několik málo zdrojů, které by pokryly téma této práce. Proto jsem musel čerpat z velkého množství článků, což je možné vidět z citované literatury.

Matematické poznámky

Kapitola 5.2.1 - Regulární fibr

Bod $a)$ je důsledkem teoremu, jehož autory jsou Arnold a Jost. Tento teorém říká, že pokud máme varietu* dimenze n a na této varietě umíme zkonstruovat n spojitých tečných vektorových polí, které dávají v každém bodě n nezávislých vektorů, pak každá souvislá† část této variety je topologicky ekvivalentní množině $T^k \times \mathcal{R}^{n-k}$ pro nějaké k . Přičemž k má význam počtu nezávislých směrů, ve kterých je M periodická. Pokud je navíc daná varieta kompaktní, pak je každá její souvislá část topologicky ekvivalentní přímo toru T^n .

Formální důkaz lze nalézt například v [5] (tvrzení 3.7 resp. 3.16).

Tvrzení (Arnold-Jost)

Nechť M je souvislá varieta dimenze n a nechť X_1, \dots, X_n je n tečných vektorových polí, která jsou nezávislá v každém bodě M a $[X_i, X_j] = 0$ na M pro $i \neq j$. Potom existuje $k \leq n$ takové, že M je difeomorfní‡ s $T^k \times R^{n-k}$.

Nyní intuitivně naznačíme důkaz tvrzení. Pro libovolnou n -tici $t \in R^n$ označme $\phi^t = \phi_{X_n}^{t_n} \circ \dots \circ \phi_{X_1}^{t_1}$, kde ϕ_{X_i} je tok daný vektorovým polem X_i . Toky $\phi_{X_1}, \dots, \phi_{X_n}$ nejsou obecně periodické. Proto budeme hledat vektory $t \in R^n$, pro které je složený tok ϕ periodický tj. $\phi^t P = P$ pro každé $P \in M$. Taková množina vektorů je neprázdná, diskrétní grupa v R^n s operací sčítání. Zřejmě můžeme zvolit bázi této množiny e_1, \dots, e_k , pro kterou po vhodném přeškálování platí $\phi^{2\pi e_i} P = P$ pro každé $P \in M$. Takovou bázi můžeme dále doplnit vektory u_1, \dots, u_{n-k} na bázi celého prostoru R^n . A tedy pro libovolný vektor $t \in R^n$ a bod $P \in M$ máme

$$\phi^t P = \phi^{\theta_1 e_1 + \dots + \theta_k e_k + r_1 u_1 + \dots + r_{n-k} u_{n-k}} P,$$

kde $\theta_i \in [0, 2\pi)$ a $r_i \in R$. Protože M je navíc souvislá a tečná vektorová pole X_1, \dots, X_n jsou nezávislá v každém bodě fázového prostoru, existuje pro každé $P, Q \in M$ vektor $t \in R^n$ takový, že $\phi^t P = Q$. Zvolíme-li nyní libovolný bod $P_0 \in M$, dostáváme z předchozího (a obrázku 2 na str. 14) diffeomorfismus

$$\begin{aligned} \phi P_0 : \quad T^k \times R^{n-k} &\rightarrow M, \\ t = (\theta_1, \dots, \theta_k, r_1, \dots, r_{n-k}) &\mapsto \phi^t P_0. \end{aligned}$$

*Ize si předsavit, že jde o spojení konečně mnoha hladkých ploch, příkladem je torus

†množina X je souvislá, jestliže neexistují otevřené množiny U a V takové, že $X \subseteq U \cup V$ a $U \cap V = \emptyset$

‡je to homeomorfismus, který má navíc spojitě parciální derivace a to i pro inverzi

Tím jsme (až na technické detaily) dokázali platnost tvrzení.

Poznamenejme, že předpoklad $[X_i, X_j] = 0$ zajišťuje komutativitu toků ϕ_{X_i} , bez které by výše uvedená diskrétní grupu nemusela být grupou. Tato grupa je ve zvolené bázi e_1, \dots, e_n rovna $2\pi Z^n$. Matematicky lze psát $T^n = R^n / 2\pi Z^n$, protože $R^n / 2\pi Z^n$ představuje ztotožnění všech vektorů v R^n , které se liší o 2π -násobek nějakého vektoru z Z^n . Způsob takového zápisu bude obzvláště výhodný v singulárním případě.

Předpoklady předchozího tvrzení splníme, pokud položíme

$$M = \bigcap_{i=1}^n F_i^{-1}(c_i)$$

a tečná vektorová pole na M budou rovna

$$X_{F_1} = \mathbb{J} \cdot \nabla F_1, \dots, X_{F_n} = \mathbb{J} \cdot \nabla F_n.$$

Zbývá ověřit splnění podmínky $[X_i, X_j] = 0$. Protože X_{F_i} jsou tečná vektorová pole, závisí na n souřadnicích definovaných pouze na množině M . Z vlastností Poissonovy závorky a Lieovy závorky pak plyne

$$[X_{F_i}, X_{F_j}] = X_{\{F_i, F_j\}} = 0.$$

Literatura

- [1] H. Hofer, E. Zehnder (1994): Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. *Birkhäuser advanced texts*, Birkhäuser Verlag.
- [2] M. Tabor (1989): Chaos and integrability in nonlinear dynamics. *A Wiley-Interscience Publication*, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-82728-2.
- [3] S. I. Pidkuiko (1992): On the denseness of the set of nonintegrable hamiltonians. *Izv. AN. Ser. Mat.* , 1992, 56:4, p. 863-876.
- [4] V. V. Kalashnikov (1999): Nondegenerate systems and generic properties of the integrable hamiltonian systems. *Journal of Mathematical Sciences* , 1999, vol. 94, no. 4.
- [5] A. Giorgilli: Integrable Systems.
<http://www.matapp.unimib.it/~antonio/hamper/integrabili.ps.gz>
<http://www.matapp.unimib.it/~antonio/hamper/hamper.html>
- [6] G. Gentile (2006): Stability theory and KAM.
Encyclopedia of Mathematical Physics, 2006, vol. 5, p. 26-32, Eds. J.-P. Francoise, G.L. Naber and T. Sh. Tsun, Elsevier, Oxford.
- [7] César R. de Oliveira (1999): (In)stability in Classical Mechanics.
Rev. Bras. Ens. Fis., 1999, vol. 21 (1), p. 22-32.
- [8] Giancarlo Benettin: The elements of Hamiltonian perturbation theory.
<http://www.math.unipd.it/benettin/postscript/elements.ps>
- [9] N. Roy (2005): Regular deformations of completely integrable systems.
Journal of symplectic geometry, vol. 3, no. 1, p. 1-16.
- [10] R. H. Cushman, D. A. Sadovskii (2000): Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields. *Physica D 142*, p. 166-196.
- [11] F. Verhulst: Measures of Chaos in Hamiltonian Systems.
<http://www.math.uu.nl/people/verhulst/SAMOSpap.pdf>
- [12] R. H. Cushman, J. J. Duistermaat (1997): Non-Hamiltonian Monodromy. Preprint, Utrecht.
- [13] N. T. Zung (1995): A topological classification of integrable Hamiltonian systems. *Séminaire Gaston Darboux, Université Montpellier II*, 1994-1995, p. 43-54.

- [14] T. Bau, N. T. Zung (1997): Singularities of integrable and near integrable Hamiltonian systems. *Journal of Nonlinear Science*, 1997, vol. 7, p. 1-7.
- [15] D. A. Sadovskii, B. I. Zhilinskiĭ (2006): Quantum monodromy, its generalizations and molecular manifestations. *Molecular Physics*, 2006, vol. 0, p. 1-23.
- [16] E. Miranda: Singularities in integrable systems.
<http://www.math.unipd.it/benettin/postscript/elements.ps>
- [17] E. Miranda, N. T. Zung: Equivariant normal form for nondegenerate singular orbits of integrable hamiltonian systems.
- [18] N. T. Zung (1996): Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities. *Compositio Mathematica*, 1996, vol. 101, p. 179-215.
- [19] N. T. Zung (2003): Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, II: Topological classification. *Compositio Mathematica*, 2003, vol. 138, p. 125-156.
- [20] N. T. Zung (1997): A note on focus-focus singularity. *Differential Geometry and Applications*, 1997, vol. 7, p. 123-130.
- [21] V. N. San (1998): Bohr-Sommerfeld conditions for Integrable Systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Applied Math.*, 2000, vol. 53, p. 143-217.
- [22] H. Broer, R. H. Cushman, F. Fassò, F. Takens (2002): Geometry of KAM-tori for nearly integrable Hamiltonian systems. *preprint*.
- [23] L. Grondin, D. A. Sadovskii, B. I. Zhilinskiĭ (2001): Monodromy in systems with coupled angular momenta and rearrangement of bands in quantum spectra. *Phys. Rev. A*, v. 69, 012105.
- [24] R. Gompf (2005): What is a Lefschetz Pencil. *Notices Amer. Math. Soc.*, 2005, v. 52, p. 848 - 850.
- [25] -: Online encyklopedie *Wikipedia*.